

两相介质随机场的随机谐和函数表达

梁诗雪¹, 任晓丹¹, 李杰^{1,2}

(1. 同济大学 土木工程学院, 上海 200092; 2. 同济大学 土木工程防灾国家重点实验室, 上海 200092)

摘要: 给出了两相介质随机场的定义, 引入均匀性假定以作为两相介质随机场表达的基础. 采用随机谐和函数生成标准高斯随机场, 并将其作为生成两相介质随机场的中间量. 通过引入 Nataf 变换和 Hermite 多项式展开, 给出了两相介质随机场和标准高斯随机场之间的变换关系. 由此, 可以给出标准正态随机场与两相介质随机场之间相关函数的关系, 将标准高斯随机场转化为目标两相介质随机场. 通过数值算例验证了采用随机谐和函数表述两相介质随机场的正确性.

关键词: 两相介质随机场; 随机谐和函数; Nataf 变换; Hermite 多项式展开

中图分类号: O211.6

文献标志码: A

Simulation of Two-Phase Random Field by Stochastic Harmonic Functions

LIANG Shixue¹, REN Xiaodan¹, LI Jie^{1,2}

(1. College of Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. Key Laboratory of Disaster Reduction in Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: In the present paper, a method was proposed to represent the two-phase, homogeneous random field. In the first place, the framework of two-phase random field was put forward and the homogeneous and isotropic assumption was given as the premise of the work. Then, the stochastic harmonic function (SHF) representation for the Gaussian random field was provided as the inter-media for the two-phase random field. With the SHF based random field, the Nataf's transformation was applied to convert Gaussian random field into the target random field. The Hermite polynomials were used as the numerical solution for the bivariate Gaussian pdf involved in the Nataf's transformation. Finally, several numerical examples were given to clarify the validity of stochastic harmonic function based two-phase random field.

Key words: two-phase random field; stochastic harmonic function; Nataf transformation; Hermite polynomials

对于大多数复合工程材料, 其材料组成、内部初始缺陷(微裂缝、微孔洞等)都具有随机性, 反映在力学性能上的明显特征就是宏观力学指标(弹性模量、断裂能、强度)的离散性^[1]. 对材料随机性的科学反映与合理描述, 能使人们更加精细地对材料细观结构进行建模, 进而对材料随机的本构关系进行分析与研究. 值得注意的是, 对于随机材料, 存在着两种意义上的随机性影响: 物理性质的随机性与几何分布的随机性. 前者反映材料的物理性质(如细观断裂能等), 一般采用单相介质描述; 后者反映复合材料中不同介质空间分布的随机性, 一般根据复合材料的组成, 采用两相甚至多相随机介质描述. 本文重点研究两相介质材料几何分布随机性的科学反映问题.

考察国内外的研究进展, 对两相介质复合材料空间分布随机性的描述可以分为两大类: 基于扫描技术的两相介质描述和基于随机场的两相介质描述. 以混凝土材料为例, 为了描述混凝土内部多相介质的复杂性质, 研究者基于扫描成像技术(CT 扫描^[2]、X 射线扫描^[3]等), 将混凝土图像中骨料的空间分布进行数字重构, 并区分骨料与水泥砂浆, 建立有限元模型. 虽然这种技术能够提供较为精确的细观模型, 但在本质上, 这种描述属于对于几何分布随机性的样本描述. 此外, 由于扫描—重构—有限元网格建模这一系列步骤较为复杂, 基于扫描重构的混凝土细观分析仅能给出少数样本的裂纹开展、应力应变曲线等模拟结果, 难以对细观结构空间分布随机性进行总体描述.

另一方面, 许多学者试图通过随机场对两相介

收稿日期: 2015-12-17

基金项目: 国家自然科学基金(90715033, U1134209)

第一作者: 梁诗雪(1987—), 女, 博士生, 主要研究方向为混凝土随机损伤力学. E-mail: liangshixue0716@126.com

通讯作者: 李杰(1957—), 男, 教授, 博士生导师, 工学博士, 主要研究方向为混凝土随机损伤力学、随机动力系统分析与生命线工程抗灾. E-mail: lijie@tongji.edu.cn

质复合材料的空间分布进行描述. 在通过实验手段获得两相介质复合材料统计信息的前提下, 研究者发展出了多种模拟两相介质随机场的方法. 例如: Joshi^[4]通过线性滤波方法, 将独立的标准高斯随机过程变换为不相关的离散随机过程, 用以描述材料的两相介质特征. Quiblier^[5]在 Joshi 的基础上, 将一维随机过程描述推广至二维、三维随机场. Rintoul 等^[6]采用模拟退火方法给出二维颗粒材料的分布, 用以描述孔隙介质随机场. Yeong 等^[7]将扫描成像技术和随机场模拟方法相结合, 基于最小能量法给出了两相介质随机场的模拟方法. Ilango 等^[8]在 Joshi 的基础上, 给出了基于 Karhunen-Loeve 展开的两相介质随机场, 用以描述二维空间孔隙结构. 基于 Karhunen-Loeve 展开方法描述随机场, 须引入足够多的随机变量对随机场进行模拟, 由此增加了计算难度、降低了计算效率. 近年来, 为了减少随机场模拟中随机变量的个数, 陈建兵等^[9-10]提出了随机谱和函数的概念, 用以描述随机过程. 可以证明: 当频率与相位在经过剖分的子空间内分别服从独立均匀分布、且幅值由随机频率与目标功率谱密度决定时, 则无论随机谱和函数分量的个数是多少, 该随机过程的功率谱密度函数均等于目标功率谱密度函数. 孙伟玲等^[11]给出了随机过程的第二类随机谱和函数方法, 即当分量幅值、频率与相位均为随机变量时, 随机谱和函数过程的功率谱密度函数也可以精确地等于目标功率谱密度函数. 梁诗雪等^[12]将上述随机谱和函数表达进一步扩展至空间随机场.

本文引入均匀性假定作为两相介质随机场表达的基础. 采用随机谱和函数生成二维均匀高斯随机场, 并将其作为生成两相介质随机场的中间量. 进而, 基于 Nataf 变换与 Hermite 多项式展开, 获得目标两相介质随机场与平稳高斯随机场之间的 Nataf 变换关系以及它们的数值特征(相关函数)之间的关系. 由此可将高斯随机场转化为目标两相介质随机场. 通过数值算例, 建立了混凝土强度的两相介质随机场, 验证了这一方法的正确性.

1 两相介质随机场的定义

不失一般性, 引入两相随机介质并采用离散的二维随机场对其空间分布进行描述. 不妨设这一随机场任意点处的概率密度函数服从 0-1 分布, 因而可以将其表示为

$$Z_0(\mathbf{u}) = \begin{cases} 1, & \text{若 } \mathbf{u} \text{ 位于强相中} \\ 0, & \text{若 } \mathbf{u} \text{ 位于弱相中} \end{cases} \quad (1)$$

其中, $\mathbf{u} = \{x_1, x_2\}$ 为二维空间向量.

对于混凝土或土体而言, 式(1)中的强相可以视为混凝土的骨料或土体中的颗粒等; 而弱相可以看作是混凝土中的水泥砂浆基体或者土体中的孔洞等. 值得注意的是, 强相出现的概率正是其面积(体积)所占的比例. 因此, 可以将强相(取值为 1 的相)所对应的概率设为 ρ , 而将弱相(取值为 0 的相)所对应的概率定为 $1-\rho$.

上述两相介质随机场的数值特征为

$$E(Z_0) = \rho \quad (2)$$

$$D(Z_0) = E(Z_0^2) - E^2(Z_0) = \rho - \rho^2 \quad (3)$$

式中: $E(\cdot)$ 表示随机场的数学期望; $D(\cdot)$ 表示随机场的方差.

对于均匀随机场, 其相关函数可以定义为

$$R_{Z_0}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = E[Z_0(\mathbf{u}_1)Z_0(\mathbf{u}_2)] = R_{Z_0}(\xi) \quad (4)$$

式中: \mathbf{u}_1 和 \mathbf{u}_2 分别为空间中两点; ξ 为两点之间的距离 $\xi = \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|$.

将随机场 Z_0 规则化为均值为 0、方差为 1 的单位随机场

$$Z(\mathbf{u}) = \begin{cases} \frac{\rho-1}{\sqrt{\rho(1-\rho)}}, & \text{若 } \mathbf{u} \text{ 位于强相中} \\ \frac{\rho}{\sqrt{\rho(1-\rho)}}, & \text{若 } \mathbf{u} \text{ 位于弱相中} \end{cases} \quad (5)$$

基于式(4), 给出单位随机场 $Z(\mathbf{u})$ 的相关函数 $R_{ZZ}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ 为

$$R_{ZZ}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = E[Z(\mathbf{u}_1)Z(\mathbf{u}_2)] \quad (6)$$

而自协方差函数 $K_Z(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ 与相关函数 $R_{ZZ}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ 之间的关系为

$$\begin{aligned} K_{ZZ}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) &= E[(Z(\mathbf{u}_1) - E(Z(\mathbf{u}_1)))(Z(\mathbf{u}_2) - \\ &E(Z(\mathbf{u}_2)))] = R_{ZZ}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) - \\ &E(Z(\mathbf{u}_1))E(Z(\mathbf{u}_2)) = \\ &R_{ZZ}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \end{aligned} \quad (7)$$

由两相介质随机场的定义以及式(7)可知, 在式(1)条件约束下, 只要给出了两相介质随机场每一相所占的比例以及相关函数, 两相介质随机场即可完全确定.

2 高斯随机场的随机谱和函数表达

本文采用高斯平稳随机场作为基本随机场生成两相介质随机场. 为此, 首先采用随机谱和函数^[12]描述一般二维随机场:

$$Y(x_1, x_2) = \sqrt{2} \sum_{n_1=1}^{N_1} \sum_{n_2=1}^{N_2} [A_{n_1 n_2} \cos(K_{1n_1} x_1 +$$

$$K_{2n_2} x_2 + \Phi_{n_1 n_2}^{(1)}) + \tilde{A}_{n_1 n_2} \cos(K_{1n_1} x_1 - K_{2n_2} x_2 + \Phi_{n_1 n_2}^{(2)})] \quad (8)$$

式中: N_1, N_2 为随机谐和函数展开项数; $A_{n_1 n_2}, \tilde{A}_{n_1 n_2}, K_{1n_1}, K_{2n_2}, \Phi_{n_1 n_2, 1}, \Phi_{n_1 n_2, 2}$ 分别为随机场第 n_1, n_2 个谐和分量的幅值、波数和相位角. $K_{1n_1}^{(p)} (1 \leq n_1 \leq N_1 - 1)$ 为 $[0, K_{1u}]$ 的内点, 且满足 $0 \leq K_{11}^{(p)} \leq K_{12}^{(p)} \leq \dots \leq K_{1N_1-1}^{(p)} \leq K_{1u}$; 记 $K_{10}^{(p)} = 0, K_{1N_1}^{(p)} = K_{1u}$. 同理, $K_{2n_2}^{(p)} (1 \leq n_2 \leq N_2 - 1)$ 为 $[0, K_{2u}]$ 的内点, 且满足 $0 \leq K_{21}^{(p)} \leq K_{22}^{(p)} \leq \dots \leq K_{2N_2-1}^{(p)} \leq K_{2u}$, 并记 $K_{20}^{(p)} = 0, K_{2N_2}^{(p)} = K_{2u}$. 在上述表述中, 波数 K_{1n_1}, K_{2n_2} 和相位角 $\Phi_{n_1 n_2, 1}, \Phi_{n_1 n_2, 2}$ 均为随机变量.

对于式(8)所示的随机谐和函数, 可以证明^[12], 若满足以下条件:

(1) $\Phi_{n_1 n_2, 1}, \Phi_{n_1 n_2, 2} (n_1 = 1, 2, \dots, N_1, n_2 = 1, 2, \dots, N_2)$ 为相互独立的随机变量, 服从 $[0, 2\pi]$ 区间的均匀分布.

(2) $K_{1n_1}, K_{2n_2} (n_1 = 1, 2, \dots, N_1, n_2 = 1, 2, \dots, N_2)$ 为相互独立的随机变量, 分别服从 $(K_{1n_1}^{(p)-1}, K_{1n_1}^{(p)})$ 和 $(K_{2n_2}^{(p)-1}, K_{2n_2}^{(p)})$ 区间内均匀分布, 概率密度函数 $p_{K_{m_j}}(K_j)$ 为

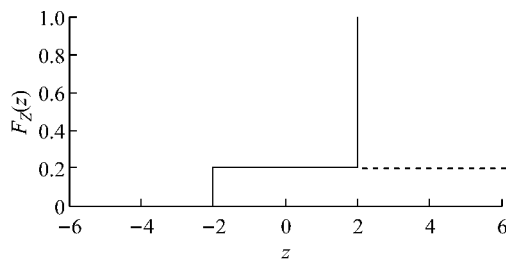
$$p_{K_{m_j}}(K_j) = \begin{cases} \frac{1}{K_{m_j}^{(p)} - K_{m_j}^{(p)-1}} = \frac{1}{\Delta K_{m_j}}, & K \in (K_{m_j}^{(p)-1}, K_{m_j}^{(p)}], j = 1, 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (9)$$

(3) 随机波数的函数为

$$A_{n_1 n_2} = \sqrt{2S_{Y_0 Y_0}(K_{1n_1}, K_{2n_2}) \Delta K_{1n_1} \Delta K_{2n_2}} \quad (10)$$

$$\tilde{A}_{n_1 n_2} = \sqrt{2S_{Y_0 Y_0}(K_{1n_1}, -K_{2n_2}) \Delta K_{1n_1} \Delta K_{2n_2}} \quad (11)$$

其中, $S_{Y_0 Y_0}$ 为高斯随机场的功率谱密度函数, 其与高斯随机场的相关函数 $R_{Y_0 Y_0}$ 之间服从维纳-辛钦关系



a 两相介持随机场的累积概率分布函数

$$S_{Y_0 Y_0}(K_1, K_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_{Y_0 Y_0}(\xi_1, \xi_2) \cdot e^{-i(K_1 \xi_1 + K_2 \xi_2)} d\xi_1 d\xi_2 \quad (12)$$

$$R_{Y_0 Y_0}(\xi_1, \xi_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_{Y_0 Y_0}(K_1, K_2) \cdot e^{i(K_1 \xi_1 + K_2 \xi_2)} dK_1 dK_2 \quad (13)$$

则所生成的随机场为零均值平稳随机场, 且其截口概率密度函数渐进于标准正态分布.

基于随机谐和函数表达, 生成二维高斯随机场的步骤为: ①给出上、下限截断波数 K_{1u}, K_{2u} , 划分波数区间 $(K_{m_j}^{(p)-1}, K_{m_j}^{(p)})$ 并采用拟对称点法^[11]进行概率空间剖分选点, 获得 K_{1n_1}, K_{2n_2} 和 $\Phi_{n_1 n_2, 1}, \Phi_{n_1 n_2, 2}$; ②由式(9)~(13)给出功率谱密度函数 $S_{Y_0 Y_0}$ 与幅值表达式; ③由式(8)给出的随机谐和函数, 生成平稳高斯随机场.

3 Nataf 变换与 Hermite 多项式展开

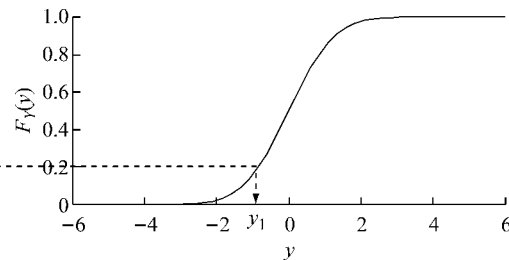
3.1 Nataf 变换

Nataf 变换是将函数从一般分布空间转换为标准正态空间的一个数学模型. 采用 Nataf 变换, 将非正态分布变换为等效的标准正态分布的原则一般称之为等概率变换原则^[13], 即非正态分布与标准正态分布具有相同的累积分布函数

$$F_Z(z) = F_Y(y) \quad (14)$$

式中: $F_Z(z)$ 表示目标分布的累积概率分布函数; $F_Y(y)$ 表示标准正态分布的累积概率分布函数.

在本节中, 笔者试图采用 Nataf 变换给出前述两相介质随机场与上述高斯平稳随机场之间的关系, 同时给出其数值特征, 即相关函数之间的关系. 图 1 给出了基于 Nataf 变换的具有离散分布的累积概率分布函数和对应的标准正态分布的累积概率分布函数.



b 标准正态累积分布

图 1 Nataf 变换

Fig.1 Nataf's transformation

显然, 两相介质随机场的累积概率分布函数呈现“阶梯”形, 而在阶梯处的累积概率等于两相介质

随机场强相出现的概率 ρ . 根据标准正态分布的累计概率分布公式, 不难求得标准正态分布对应于累计

概率为 ρ 的分值点函数值 y_1

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y_1} e^{-t^2/2} dt = \rho \quad (15)$$

因此,这里的 Nataf 变换可以理解为,当 $y \leq y_1$ 时,标准正态分布的分布面积所对应于两相介质随机场的强相,即 $Z(\mathbf{u}) = (\rho - 1) / (\sqrt{\rho(1-\rho)})$. 同理,当 $y > y_1$ 时,标准正态分布的分布面积所对应于两相介质随机场的弱相,即 $Z(\mathbf{u}) = \rho / (\sqrt{\rho(1-\rho)})$.

由此,可定义两相介质随机场的 Nataf 变换公式 $t(y)$ 为

$$t(y) = \begin{cases} \frac{\rho - 1}{\sqrt{\rho(1-\rho)}}, & y \leq y_1 \\ \frac{\rho}{\sqrt{\rho(1-\rho)}}, & y > y_1 \end{cases} \quad (16)$$

将式(16)代入式(6),两相介质随机场的相关函数可以进一步表示为

$$\begin{aligned} R_{ZZ}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) &= E[Z(\mathbf{u}_1)Z(\mathbf{u}_2)] = \\ &E[t(Y(\mathbf{u}_1))t(Y(\mathbf{u}_2))] = \\ &\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} z_1 z_2 p_{zz}(z_1, z_2) dz_1 dz_2 = \\ &\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t(y_1)t(y_2) p_u(y_1, y_2) dy_1 dy_2 \end{aligned} \quad (17)$$

式中: $p_{zz}(z_1, z_2)$ 表示离散分布 z 的二维概率密度函数; $p_u(y_1, y_2)$ 为二维标准正态分布概率密度函数.

将式(17)中二维标准正态分布 $p_u(y_1, y_2)$ 的概率密度函数改写为其完备形式,可以获得

$$\begin{aligned} R_{ZZ}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t(y_1)t(y_2) \cdot \\ &\frac{e^{-(y_1^2 - 2R_{YY}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)y_1 y_2 + y_2^2) / (2(1-R_{YY}^2(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)))}}{2\pi \sqrt{1-R_{YY}^2(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)}} \cdot \\ &dy_1 dy_2 \end{aligned} \quad (18)$$

式(18)给出了相关函数 $R_{ZZ}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ 和 $R_{YY}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ 之间的关系,其中 $R_{ZZ}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ 为已知的两相介质随机场的相关函数, $R_{YY}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ 为待求的标准高斯随机场的相关函数. 为了简单起见,在以后的推导中,将 $R_{ZZ}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$, $R_{YY}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ 统一简写为 R_{ZZ}, R_{YY} .

3.2 Hermite 多项式展开

Hermite 多项式是一种经典的正交多项式族,根据其应用的不同,可分为物理学定义形式和概率论定义形式^[14],本文采用在概率论中运用广泛的形式

$$H_m(x) = (-1)^m e^{x^2/2} \frac{d^m}{dx^m} (e^{-x^2/2}) \quad (19)$$

Hermite 多项式关于标准正交函数带权正交

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) H_n(x) e^{x^2/2} dx = n! \delta_{nm} \quad (20)$$

其中, δ_{nm} 为 Kronecker 符号.

根据 Ilago 等^[8]建议的方法,采用 Hermite 多项式可将二维标准正态分布展开如下:

$$p_u(y_1, y_2) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} c_{ij} H_i(y_1) H_j(y_2) \phi(y_1) \phi(y_2) \quad (21)$$

其中, $\phi(x) = e^{-x^2/2} / \sqrt{2\pi}$ 为标准正态分布. c_{nm} 为表展展开形式的参数,可以通过引入正交性条件予以解出.

首先,将式(21)代入式(17),有

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_u(y_1, y_2) H_m(y_1) H_n(y_2) dy_1 dy_2 &= \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} c_{ij} H_i(y_1) H_j(y_2) \phi(y_1) \phi(y_2) \cdot \\ H_m(y_1) H_n(y_2) dy_1 dy_2 \end{aligned} \quad (22)$$

由正交性条件可知,当且仅当 $i=m, j=n$ 时,式(22)可写为

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_u(y_1, y_2) H_m(y_1) H_n(y_2) dy_1 dy_2 = c_{nm} \cdot m! n! \quad (23)$$

整理式(23)并将二维正态分布的完备形式(18)代入式(23),有

$$\begin{aligned} c_{nm} &= \frac{1}{m! n!} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(y_1^2 - 2R_{YY}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)y_1 y_2 + y_2^2) / (2(1-R_{YY}^2(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)))}}{2\pi \sqrt{1-R_{YY}^2}} \cdot \\ &H_m(y_1) H_n(y_2) dy_1 dy_2 \end{aligned} \quad (24)$$

由于 Hermite 多项式与标准正态分布带权正交,可以引入如下积分公式:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2} H_m(ax) dx &= \\ \sqrt{\pi} (1-a^2/2)^{m/2} H_m\left(\frac{ay}{(1-a^2/2)^{1/2}}\right) \end{aligned} \quad (25)$$

将式(25)给出的积分公式,代入式(24),化简可得

$$c_{nm} = \frac{1}{m! n!} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-y_2^2/2}}{\sqrt{2\pi}} R_{YY}^m H_m(y_2) H_n(y_2) dy_2 \quad (26)$$

观察式(26),可以进一步应用正交性条件,当且仅当 $m=n$ 时, c_{nm} 可以化简为

$$c_{nm} = \frac{1}{m! n!} R_{YY}^m n! = \frac{1}{m!} R_{YY}^m \quad (27)$$

将式(27)代入式(21),有

$$p_u(y_1, y_2) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} R_{YY}^m H_m(y_1) H_m(y_2) \phi(y_1) \phi(y_2) \quad (28)$$

将二维标准正态分布表达式(28)代入式(17)

$$R_{ZZ}(u_1, u_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t(y_1)t(y_2) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{R_{YY}^m}{m!} H_m(y_1) \cdot H_m(y_2) \phi(y_1)\phi(y_2) dy_1 dy_2 = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{R_{YY}^m}{m!} \left(\int_{-\infty}^{\infty} t(y) H_m(y) \phi(y) dy \right)^2 \quad (29)$$

为简便起见,引入

$$G_m = \int_{-\infty}^{\infty} t(y) H_m(y) \phi(y) dy \quad (30)$$

因此,两相介质随机场相关函数 R_{ZZ} 和标准高斯随机场相关函数 R_{YY} 之间的关系可以写为

$$R_{ZZ}(u_1, u_2) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{G_m^2}{m!} R_{YY}^m \quad (31)$$

由第 2 节和第 3 节内容,可以将两相介质随机场产生步骤总结如下:①通过实验获得两相介质随机场各相介质所占的比例 ρ , 确定目标两相介质随机场的相关函数 R_{ZZ} ; ②由式(30), (31)求解高斯随机场自相关函数 R_{YY} ; ③由式(8)~(13), 采用随机谐和函数, 生成标准高斯随机场样本; ④将标准高斯随机场样本代入两相介质随机场 Nataf 变换公式(16), 即可获得两相介质随机场样本。

4 数值算例

4.1 R_{YY} 数值求解

根据式(30), (31), 可以求解高斯随机场自相关函数 R_{YY} . 本文采用复合辛普森公式对式(30)进行求解. 考虑正态分布函数的衰减性, 将积分区间取为 $[-20, 20]$. 同时, 为了考虑式(31)中 Hermite 多项式展开项数的影响, 研究了当强相所占的比例 $\rho = 0.5$, 两相介质随机场相关函数 $R_{ZZ} = 0.45$ 时, 展开项数不同对 R_{YY} 数值的影响. 图 2 给出了当展开项数从 5 到 30 项时, R_{YY} 取值的变化.

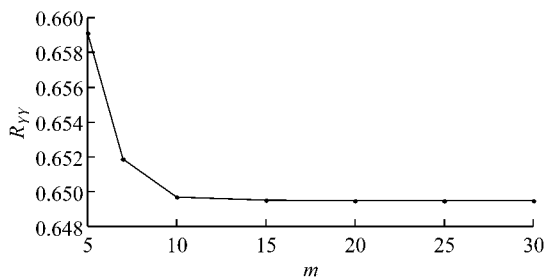


图 2 Hermite 多项式展开项数

Fig.2 Number of polynomial expansion terms

可见, 当 Hermite 展开项数达到 15 项时, R_{YY} 的数值趋于稳定, 考虑到计算效率与精度, 本文建议的

Hermite 展开项数 $m=20$.

4.2 两相介质随机场

本节以混凝土材料抗压强度随机场为例, 给出两相介质随机场的具体建模过程. 从细观角度来看, 混凝土材料主要是由骨料和水泥砂浆两相组成. 二者的材料性能差异很大, 常用骨料的抗压强度在 120~250 MPa^[15] 之间, 远高于商用混凝土的立方体抗压强度标准值 15~80 MPa. 混凝土试件受力变形直至破坏的过程中, 大部分骨料单元远未达到其抗压强度, 而水泥砂浆强度较低, 裂纹一般产生于水泥砂浆相或者骨料与砂的界面. 因此, 在混凝土细观结构的建模中, 需要对骨料和水泥砂浆进行精确的建模并考虑其几何分布的随机性.

由 Ren 等的试验^[16], 可以通过混凝土配合比反算出混凝土骨料(强相)所占的比例为 $\rho = 0.451$, 水泥砂浆(弱相)所占的比例为 $1 - \rho = 0.549$.

设混凝土骨料抗压强度为 200 MPa, 水泥砂浆抗压强度为 50 MPa. 给出混凝土抗压强度分布的随机场 $f(x_1, x_2)$, 有

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 200 \text{ MPa, 若 } (x_1, x_2) \text{ 位于骨料中} \\ 50 \text{ MPa, 若 } (x_1, x_2) \text{ 位于水泥砂浆中} \end{cases} \quad (32)$$

选取两相介质随机场的相关函数形式如下^[17]:

$$R_{ff}(\xi_1, \xi_2) = \exp\left(-\left(\frac{\xi_1}{b_1}\right)^2 - \left(\frac{\xi_2}{b_2}\right)^2\right), \quad -\infty < \xi_1 < \infty, -\infty < \xi_2 < \infty \quad (33)$$

式中: ξ_1, ξ_2 分别为 x_1, x_2 方向的距离; b_1, b_2 分别为 x_1, x_2 方向的相关长度, 本文取为试验^[16]中混凝土最大骨料粒径 $b_1 = b_2 = 0.8 \text{ cm}$.

对应于式(33)的功率谱密度函数为

$$S_{ZZ}(K_1, K_2) = \frac{b_1 b_2}{4\pi} \exp\left(-\left(\frac{b_1 K_1}{2}\right)^2 - \left(\frac{b_2 K_2}{2}\right)^2\right), \quad -K_{1u} < K_1 < K_{1u}, -K_{2u} < K_2 < K_{2u} \quad (34)$$

由式(8)~(13)采用随机谐和函数生成高斯平稳随机场, 截断波数 $K_{1u} = K_{2u} = 10 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. 随机谐和函数展开项数为 $N_1 \times N_2 = 8 \times 8$.

图 3 给出了目标两相介质随机场的功率谱密度函数. 图 4 给出了采用 500 组样本所给出的平均功率谱密度函数. 图 5a, b 分别给出了在 K_1, K_2 方向上功率谱密度函数的比较.

图 6a, b 分别给出了采用本文建议方法生成的两相介质随机场样本. 应该指出的是, 对于大多数工程材料而言, 材料样本几何特性对其破坏模式影响较大, 因而对随机场样本特征观察也是必不可少的. 图 6 中, 黑色部分代表骨料(强相), 灰色部分代

表水泥砂浆(弱相).

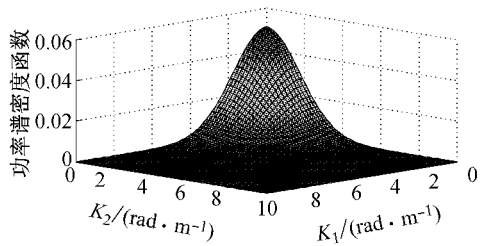


图 3 目标功率谱密度

Fig.3 Target power spectral density function

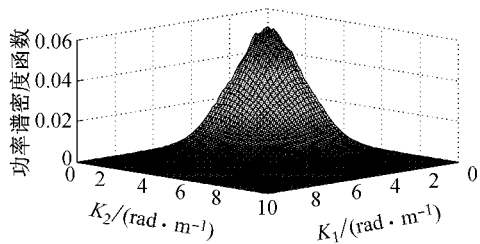
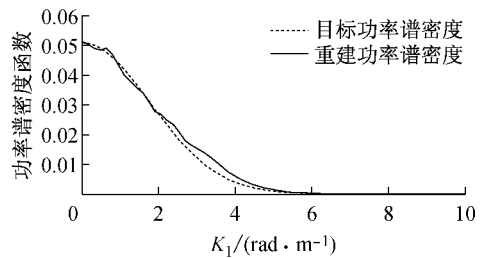
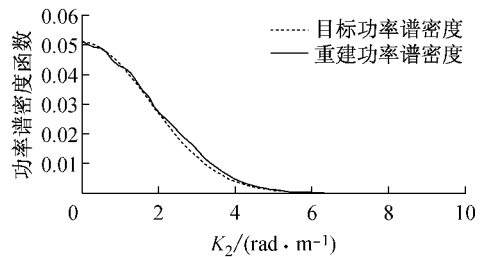


图 4 重建功率谱密度

Fig.4 Reconstructed power spectral density function



a $K_2=0$



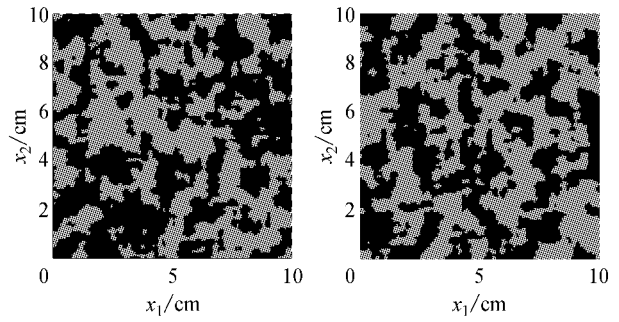
b $K_1=0$

图 5 功率谱密度函数比较

Fig.5 Power spectral density function spectrum for different K values

5 结论

本文针对复合工程材料的两相介质空间分布的随机性,提出了一种两相介质随机场的生成方法.通过试验,可以测量两相介质随机场中每一相对应比例和随机场自相关函数.通过随机谐和函数方法生成标准高斯随机场作为基本随机场,采用Nataf



a 样本 1

b 样本 2

图 6 两相介质随机场样本

Fig.6 Samples of two phase random field

变换和 Hermite 多项式展开获得标准高斯随机场与目标两相介质随机场之间的变换关系.由此,给出了两相介质随机场的生成方法.通过数值算例,生成了混凝土强度的两相介质随机场,同时在数值特征(功率谱密度函数)层面和样本层面上验证了本文所提出方法的正确性.

参考文献:

[1] 李杰. 混凝土随机损伤力学的初步研究[J]. 同济大学学报: 自然科学版, 2004, 32(10): 1270.
 LI Jie. Research on the stochastic damage mechanics for concrete material and structures [J]. Journal of Tongji University: Natural Science, 2004, 32(10): 1270.

[2] Diamond S, Huang J. The ITZ in concrete—a different view based on image analysis and SEM observations[J]. Cement and Concrete Composites, 2001, 23(2): 179.

[3] Garboczi E J. Three-dimensional mathematical analysis of particle shape using X-ray tomography and spherical harmonics: Application to aggregates used in concrete [J]. Cement and Concrete Research, 2002, 32(10): 1621.

[4] Joshi M. A class of stochastic models for porous materials[D]. Lawrence: University of Kansas, 1974.

[5] Quiblier J A. A new three-dimensional modeling technique for studying porous media [J]. Journal of Colloid and Interface Science, 1984, 98(1): 84.

[6] Rintoul M D, Torquato S. Reconstruction of the structure of dispersions [J]. Journal of Colloid and Interface Science, 1997, 186(2): 467.

[7] Yeong C, Torquato S. Reconstructing random media [J]. Physical Review E, 1998, 57(1): 495.

[8] Ilango S J J, Sarkar S, Sameen A. Reconstruction of 2-D porous media using Karhunen-Lóeve expansion [J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2013, 32: 56.

[9] 陈建兵, 李杰. 随机过程的随机谐和函数表达 [J]. 力学学报, 2011, 43(3): 505.
 CHEN Jianbing, LI Jie. Stochastic harmonic function and spectral representations [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2011, 43(3): 505.

(下转第 1152 页)