第 45 卷第 4 期 同 济 大 学 学 报(自 然 科 学 版) Vol. 45 No. 4
2017 年 4 月 JOURNAL OF TONGJI UNIVERSITY(NATURAL SCIENCE) Apr. 2017

文章编号：0253-374X(2017)04-0602-02 DOI:10.11908/j.issn.0253-374x.2017.04.020

书图和扇形图的 Ramsey 数

刘 猛，李雨生
(同济大学 数学科学学院，上海 200092)

摘要：对给定的两个图 G 和 H，Ramsey 数 $R(G,H)$ 是最小的正整数 N，使得对完全图 K_N 的边任意红/蓝着色，或者存在红色子图 G，或者存在蓝色子图 H. 用 $G+H$ 表示两个不交的图 G 和 H 之间完全连边所得到的图. 设 $B_m=K_2+mK_1$，$F_n=K_1+nK_2$. 证明了当 $m\geqslant 1$ 且 $n\geqslant\max\{2,3m-2\}$，$R(B_m,F_n)=4n+1$；当 $n\geqslant 38$，$R(F_2,K_{2,n})=2n+3$.

关键词：Ramsey 数；Ramsey goodness；书图；扇形图
中图分类号：O157.5 **文献标志码**：A

Ramsey Numbers of Books and Fans

LIU Meng, *LI Yusheng*
(School of Mathematical Sciences, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: For given graphs G and H, Ramsey number $R(G,H)$ is the smallest positive integer N such that any red/blue edge-coloring of K_N contains either a red copy of G or a blue copy of H. Denote by $G+H$ the graph obtained from disjoint G and H by adding edges connecting G and H completely. Let $B_m=K_2+mK_1$ and $F_n=K_1+nK_2$. It is shown that $R(B_m,F_n)=4n+1$ for $n\geqslant\max\{2,3m-2\}$; and $R(F_2,K_{2,n})=2n+3$ for $n\geqslant 38$.

Key words: Ramsey number; Ramsey goodness; book; fan

1 研究背景

文中研究的图均为简单图. 对给定的图 G 和 H，定义 Ramsey 数 $R(G,H)$ 为最小的正整数 N，使得对完全图 K_N 任意的红/蓝边着色，则或者存在红色子图 G，或者存在蓝色子图 H.

如果用 k 种颜色对图 G 的顶点进行着色，使得两个相邻的顶点有不同的颜色则称图 G 是可 k 正常着色的. 将正常着色中的最小 k 称为图 G 的色数，记为 $\chi(G)$. 用 $\sigma(G)$ 表示对 G 进行 $\chi(G)$ 真着色时，相同颜色顶点类所含顶点数的最小值. Burr 在文献[1]中得到 Ramsey 数的一般下界.

引理 1 设图 G 和 H 满足 $|H|=n\geqslant\sigma(G)$ 且 H 连通，则

$$R(G,H)\geqslant(\chi(G)-1)(|H|-1)+\sigma(G)$$

如果引理 1 中的等式成立，Burr 定义 H 是 G-good.

对于两个不相交的图 G 和 H，用 $G\cup H$ 来表示 G 和 H 的不相交并，用 $G+H$ 来表示 G 和 H 之间完全连边所得到的图，称为 G 和 H 的联图. 图论中有很多常见的联图，比如书图 $B_m=K_2+mK_1$ 是由 m 个三角形共用一条边得到的，扇形图 $F_n=K_1+nK_2$ 是由 n 个三角形共用一个顶点得到的. 特别地 $B_1=F_1=K_3$.

Li 等在文献[2]中证明了对固定的正整数 m，当 n 充分大时，F_n 是 B_m-good. 本文在此基础上给出 n 的一个合理下界. 并进一步得到当整数 $n\geqslant 38$ 时，$K_{2,n}$ 是 F_2-good.

定理 1 当整数 $m\geqslant 1$，$n\geqslant\max\{2,3m-2\}$ 时，$R(B_m,F_n)=4n+1$.

定理 2 当整数 $n\geqslant 38$ 时，$R(F_2,K_{2,n})=2n+3$.

目前不能确定定理 1 和定理 2 中的关于 n 的下界是不是最好的.

2 主要结果的证明

给定图 G，用 $|G|$ 表示图 G 的顶点个数，$N(v)$ 和 $d(v)$ 分别表示顶点 v 的邻域和度数. 当给图 G 的边红/蓝着色时，$N_R(v)$ 和 $d_R(v)$ 分别为顶点 v 的红邻域和红度. 类似的有蓝邻域 $N_B(v)$ 和蓝度 $d_B(v)$.

在证明定理 1 之前，先引入引理 2 和引理 3.

引理 2[3] 当整数 $m\geqslant 1$，$n\geqslant 2$ 时，$R(K_m,nK_2)=m+2n-2$.

引理 3[2] 当整数 $n\geqslant 2$ 时，$R(K_3,F_n)=4n+1$.

定理 1 的证明 要证明当整数 $m\geqslant 1$，$n\geqslant\max\{2,3m-2\}$ 时，$R(B_m,F_n)=4n+1$. 由引理 3 可知当 $m=1$ 时结论已经成立. 下面只需证明 $m\geqslant 2$ 的情形.

由引理 1，只需要证明 $R(B_m,F_n)\leqslant 4n+1$. 记

$N=4n+1$,给完全图 K_N 的边任意红/蓝着色,记 R 和 B 为所得到的红色子图和蓝色子图. 假设 R 不含 B_m,B 不含 F_n,要证明这种假设可以推出一个矛盾.

注意到对任意一点 v,由于 $d_R(v)+d_B(v)=4n$,从而或者 $d_R(v)\geqslant 2n-m+1$,或者 $d_B(v)\geqslant 2n+m$. 如果 $d_B(v)\geqslant 2n+m$,由引理 2 可知,$G[N_B(v)]$或者包含一个红色 K_{m+2},从而就有一个红色 B_m,或者包含一个蓝色 nK_2,从而与 v 相连得到蓝色 F_n. 两种情形都会产生矛盾,可以推出 $d_R(v)\geqslant 2n-m+1$.

由于 B 不含 F_n,由引理 3 可知 R 含 K_3,记这个红色 K_3 的顶点集为$\{a,b,c\}$,并且设 $A=N_R(a)-\{b,c\}$,$B=N_R(b)-(N_R(a)\cup\{a\})$,$C=N_R(c)-N_R(a)\cup N_R(b)$. 由于 R 不含 B_m,可以得到下面 3 个不等式:

$$|A|\geqslant(2n-m+1)-2=2n-m-1$$

$$|B|\geqslant(2n-m+1)-2-(m-2)=2n-2m+1$$

$$|C|\geqslant(2n-m+1)-2-2(m-2)=2n-3m+3$$

因此,可以得到

$$4n+1\geqslant|\{a,b,c\}\cup A\cup B\cup C|\geqslant 3+(2n-m-1)+(2n-2m+1)+(2n-3m+3)=6n-6m+6$$

从而推出 $n\leqslant 3m-5/2$,由于 n 为整数,从而 $n\leqslant 3m-2$,这就是所推出的矛盾.

下面证明定理 2. 在证明定理 2 之前先引入引理 4.

引理 4[4]　当整数 $n\geqslant 38$ 时,$R(B_2,B_n)=2n+3$.

定理 2 的证明　由引理 1,只需要证明当 $n\geqslant 38$ 时,$R(F_2,K_{2,n})\leqslant 2n+3$. 记 $N=2n+3$,给完全图 K_N 的边任意红/蓝着色,记 R 和 B 为所得到的红色子图和蓝色子图. 假设 R 不含 F_2,B 不含 $K_{2,n}$,要证明这种假设可以推出一个矛盾.

由于 $K_{2,n}$是 B_n 的子图,因此 B 不含 B_n,由引理 4 可知 R 含 B_2,注意到 $B_2=K_2+2K_1$,记 $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$为这个红色 B_2 的顶点集使得 x_1 和 x_3 构成这个红色 B_2 中的 K_2,记 $Y=V(R)-X$.

要在 X 中找两个点,在 Y 中找 n 个点,使得它们之间全连蓝边. 由于 R 不含 F_2,可以得到下面 3 条性质:

(1) $N_R(x_i)\cap N_R(x_j)\cap Y=\varnothing$ 对 $i=1,3;j=2,4$.

(2) $G[N_R(x_i)\cap Y]$是蓝色完全图对 $1\leqslant i\leqslant 4$.

(3) $|N_R(y)\cap X|\leqslant 2$ 对任意 $y\in Y$.

记

$$A=N_R(x_1)\cap Y\backslash N_R(x_3)$$

$$B=N_R(x_2)\cap Y\backslash N_R(x_4)$$

$$C=N_R(x_3)\cap Y\backslash N_R(x_1)$$

$$D=N_R(x_4)\cap Y\backslash N_R(x_2)$$

$$E=N_R(x_1)\cap N_R(x_3)\cap Y$$

$$F=N_R(x_2)\cap N_R(x_4)\cap Y$$

注意到 $G[A]$,$G[B]$,$G[C]$,$G[D]$,$G[E]$,$G[F]$都是蓝色完全图,可以推出$\{x_1,x_3\}$与 $B\cup D\cup F$ 全连蓝边,$\{x_2,x_4\}$与 $A\cup C\cup E$ 全连蓝边.

假设 $|\bigcup_{i=1}^{4}N_R(x_i)\cap Y|=a$,当然有 $a\leqslant 2n-1$,显然或者$|A\cup C\cup E|\geqslant\left\lceil\frac{a}{2}\right\rceil$,或者$|B\cup D\cup F|\geqslant\left\lceil\frac{a}{2}\right\rceil$,如果前者成立,那么$\{x_2,x_4\}$就会与 $A\cup C\cup E$ 构成一个蓝色 $K_{2,\lceil\frac{a}{2}\rceil}$,否则$\{x_1,x_3\}$就会与 $B\cup D\cup F$ 构成一个蓝色 $K_{2,\lceil\frac{a}{2}\rceil}$. 注意到 $Y\backslash\bigcup_{i=1}^{4}N_R(x_i)$ 与 X 全连蓝边,而且

$$|Y\backslash\bigcup_{i=1}^{4}N_R(x_i)|=2n-1-a$$

从而有

$$2n-1-a+\left\lceil\frac{a}{2}\right\rceil=2n-1-\left\lfloor\frac{a}{2}\right\rfloor\geqslant 2n-1-(n-1)=n$$

这样就可以找到一个蓝色 $K_{2,n}$,这就是所推出的矛盾.

参考文献:

[1] BURR S. Ramsey numbers involving graphs with long suspended paths[J]. Journal of the London Mathematical Society, 1981, 24(2): 405.

[2] LI Y, ROUSSEAU C. Fan-complete graph Ramsey numbers[J]. Journal of Graph Theory, 1996, 23(4): 413.

[3] BOLLOBÁS B. Modern graph theory[M]. New York: Springer, 1998.

[4] ROUSSEAU C, SHEEHAN J. On Ramsey numbers for books[J]. Journal of Graph Theory, 1978, 2(1): 77.