

隐式双离散方法定价 Merton 跳扩散期权模型

豆铨煜¹, 殷俊锋¹, 甘小艇^{1,2}

(1. 同济大学 数学科学学院, 上海 200092; 2. 楚雄师范学院 数学与统计学院, 云南 楚雄 675000)

摘要: 构造隐式双离散方法定价 Merton 跳扩散模型下的欧式和美式期权. 给出了该离散方法的稳定性分析. 数值实验表明, 所构造的方法是有效稳健的, 比显式格式具有明显的优势.

关键词: 隐式双离散; Merton 跳扩散期权模型; 稳定性

中图分类号: O241.8

文献标志码: A

An Implicit Double Discretization Method for Pricing Options under Metron's Jump-diffusion Model

DOU Quanyu¹, YIN Junfeng¹, GAN Xiaoting^{1,2}

(1. School of Mathematical Sciences, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. School of Mathematics and Statistics, Chuxiong Normal University, Chuxiong 675000, China)

Abstract: An implicit double discretization method is developed for pricing European and American options under Merton's jump-diffusion model. Stability of the method is discussed. Numerical experiments show that the proposed method is effective and robust, and has advantages over the explicit scheme.

Key words: implicit double discretization; Merton's jump-diffusion options model; stability

在期权定价的数学模型中, 最著名的一个模型是 Black-Scholes 模型^[1]. 该模型被金融界的实践者们广泛地应用于定价各种类型的期权, Black-Scholes 定价方程是使用最广泛的期权定价工具. 为了使模型与市场中的金融数据更加吻合, 人们提出了 Black-Scholes 模型的各种演变模型, 比如: 随机波动率模型^[2]、确定性局部波动率模型^[3]及跳扩散模型^[4-6]等. 其中 Merton 跳扩散模型所隐含的波动率曲线与市场中观察到的波动率微笑十分接近, 吸

引了众多国内外学者和专家的广泛关注和研究.

在 Merton 跳扩散模型下, 欧式期权满足一个带有无穷积分项的偏微分积分方程. 求解这类方程是一个非常困难且具有挑战性的课题. 近年来, 人们研究分析了求解这类方程的一些数值方法. 在文献[7]中, 作者提出了一种定常迭代法. 文献[8]采用循环预处理的共轭梯度法处理无限积分项产生的稠密矩阵. 但是仅仅考虑了在有界的数值区域外的解的一个特殊情况. 文献[9]使用显式的双离散方法求解偏微分积分方程, 并分析了保证该方法稳定的条件. 更多的求解方法请参考文献[10-13]等.

本文提出了一种新的隐式双离散方法. 主要思想是: 用复合梯形公式近似无穷积分项, 空间方向用双离散差分格式离散, 时间方向用隐式格式离散. 理论分析表明离散得到的系数矩阵是 M -矩阵, 这个性质保证了新的数值方法是稳定的. 数值实验结果验证了理论分析的正确性, 并且表明所构造的方法是有效稳健的, 比显式格式具有明显的优势.

1 Merton 跳扩散期权模型

假设标的资产价格 x 满足如下随机微分方程:

$$\frac{dx}{x} = \mu dt + \sigma dW + (\eta - 1)dN \quad (1)$$

式中: μ 和 σ 分别为资产价值没有发生跳跃时的期望收益率和波动率; W 为标准的布朗运动; N 为强度为 λ 的泊松过程; η 为跳跃的幅度, 并且服从对数正态分布:

$$q(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma\eta}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln \eta - \mu}{\gamma}\right)^2\right), \quad (2)$$

式中: γ 是标准方差.

欧式期权价值 v 满足式(3)所示的偏微分积分方程:

收稿日期: 2016-04-19

基金项目: 国家自然科学基金(No.11271289), 中央高校基本科研业务费专项资金

第一作者: 豆铨煜(1986—), 女, 博士生, 主要研究方向为金融计算. E-mail: 08douquanyu@tongji.edu.cn

通信作者: 殷俊锋(1979—), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为数值分析与科学计算. E-mail: yinjf@tongji.edu.cn

$$v_\tau - \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 v_{xx} - (r - \lambda\kappa)xv_x + (r + \lambda)v - \lambda \int_0^\infty v(x\eta)q(\eta)d\eta = 0, \quad (3)$$

其中: $(\tau, x) \in [0, T] \times [0, \infty)$, $\tau = T - t$, t 为当前时间, T 为到期日; r 为无风险利率; 系数 $\kappa = \exp(\mu + \frac{\gamma^2}{2}) - 1$. 对于欧式看跌期权, 边界条件为

$$v(\tau, 0) = Ke^{-r\tau}, \quad (4a)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} v(\tau, x) = 0, \quad \tau \in [0, T], \quad (4b)$$

初值条件为

$$v(0, x) = g(x) = \max\{K - x, 0\}. \quad (5)$$

对于看涨期权, 边界条件为

$$v(\tau, 0) = 0, \quad (6a)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [v(\tau, x) - (x - Ke^{-r\tau})] = 0, \quad \tau \in [0, T], \quad (6b)$$

初值条件为

$$v(0, x) = g(x) = \max\{x - K, 0\}, \quad (7)$$

其中 K 为敲定价值. 定义算子:

$$Lv = v_\tau - \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 v_{xx} - (r - \lambda\kappa)xv_x + (r + \lambda)v - \lambda \int_0^\infty v(x\eta)q(\eta)d\eta.$$

那么美式期权价值需要通过求解如下线性互补问题得到:

$$\begin{cases} Lv \geq 0, \\ v - g \geq 0, \\ Lv \cdot (v - g) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

对于美式看跌期权, 初值条件和边界条件分别为式(5)和

$$v(\tau, 0) = K, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} v(\tau, x) = 0, \quad \tau \in [0, T]. \quad (9)$$

美式看涨期权的初值条件和边界条件分别为式(7)和

$$v(\tau, 0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} [v(\tau, x) - (x - K)] = 0, \quad \tau \in [0, T].$$

2 隐式双离散方法

2.1 近似积分项

为了近似方程(3)中的无穷积分项, 作变量变换 $\phi = x\eta$, 那么

$$\int_0^\infty v(x\eta)q(\eta)d\eta = \frac{1}{x} \int_0^\infty v(\phi)q\left(\frac{\phi}{x}\right)d\phi. \quad (10)$$

取 $A > 0$, 把式(10)右端的积分项转化为两个积分

J_1, J_2 的和:

$$J = J(x) = \int_0^\infty v(\phi)q\left(\frac{\phi}{x}\right)d\phi = J_1 + J_2, \quad (11)$$

其中,

$$J_1 = \int_0^A v(\phi)q\left(\frac{\phi}{x}\right)d\phi, \quad (12)$$

$$J_2 = \int_A^\infty v(\phi)q\left(\frac{\phi}{x}\right)d\phi. \quad (13)$$

令 $z = \frac{A}{\phi}$, 那么

$$J_2 = A \int_0^1 v\left(\frac{A}{z}\right)q\left(\frac{A}{xz}\right)\frac{1}{z^2}dz. \quad (14)$$

考虑截断区域 $\Omega = [x_{\min}, A] \times [0, T]$ ($x_{\min} > 0$), 空间步长是 $h = (A - x_{\min})/k$, 用 (x_i, τ_n) 表示空间网格点, 那么 $x_i = x_{\min} + ih$, $\tau_n = n \cdot \Delta\tau$, $i = 0, 1, \dots, k$; $n = 0, 1, \dots, l$. 时间步长 $\Delta\tau = T/l$.

对于式(14)中的积分项, 按步长 θ 对区间 $(0, 1]$ 作均匀剖分, 用 $z_i = i\theta$ 表示离散点, 其中 $1 \leq i \leq m$, m 是整数, $m\theta = 1$, $m \geq 3$. 显然, 当 $\theta \rightarrow 0$ 时, $z_i \rightarrow 0$. 从而整个空间区域上总共有 $m + k$ 个点, 点的坐标表示为

$$x_i = \begin{cases} x_{\min} + ih, & 0 \leq i \leq k, \\ \frac{A}{1 - (i - k)\theta}, & k \leq i \leq m + k - 1. \end{cases} \quad (15)$$

用 v_i^n 表示期权值 v 在点 (x_i, τ_n) 处的近似值, $J_{1,i}^n, J_{2,i}^n$ 分别表示式(12)和式(14)的近似值, 令 $q_{i,j} = q\left(\frac{x_j}{x_i}\right)$, 则用复合梯形公式近似积分项, 得:

$$J_{1,i}^n = h \left(\frac{1}{2} v_i^n q_{i,0} + \sum_{j=1}^{k-1} v_j^n q_{i,j} + \frac{1}{2} v_k^n q_{i,k} \right), \quad 0 \leq i \leq m + k - 1, \quad (16)$$

$$J_{2,i}^n = \frac{\theta}{A} \left(\frac{1}{2} v_k^n q_{i,k} x_k^2 + \sum_{j=k+1}^{m+k-1} v_j^n q_{i,j} x_j^2 \right), \quad 0 \leq i \leq m + k - 1. \quad (17)$$

2.2 离散空间导数项

考虑下面两种有限差分形式离散二阶偏导数项 v_{xx} .

(i) 当 $x_i \in [x_{\min}, A)$ 时,

$$v_{xx} \approx \frac{v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n}{h^2}, \quad 1 \leq i \leq k - 1. \quad (18)$$

(ii) 当 $x_i \in [A, A/\theta]$ 时,

$$v_{xx} \approx 2 \left(\frac{v_{i+1}^n}{h_{i+1}(h_i + h_{i+1})} + \frac{v_{i-1}^n}{h_i(h_i + h_{i+1})} - \frac{v_i^n}{h_i h_{i+1}} \right), \quad (19)$$

其中 $k \leq i \leq m + k - 2$, $h_i = x_i - x_{i-1}$.

同理, 对于一阶偏导数项 v_x , 采用相似的格式进行离散.

定义一个向量 $v^n = [v_1^n, v_2^n, \dots, v_{N+M-2}^n]^T$, 通过导数项和积分项的离散, 可以得到一个半离散方程

$$v_\tau + Sv = y, \quad (20)$$

其中 $S = E - F$, E 是一个三对角矩阵, F 是积分项离散得到的稠密矩阵. 矩阵 E 和 F 的形式如下:

$$E = \begin{pmatrix} \beta_1 & \gamma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha_{m+k-3} & \beta_{m+k-3} & \gamma_{m+k-3} \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{m+k-2} & \beta_{m+k-2} \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} f_{12} & f_{13} & \cdots & f_{1,m+k-1} \\ f_{22} & f_{23} & \cdots & f_{2,m+k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{m+k-2,2} & f_{m+k-2,3} & \cdots & f_{m+k-2,m+k-1} \end{pmatrix}.$$

令 $\delta_i = \frac{1}{2}\sigma^2 x_i^2$, 则

$$\alpha_i = \begin{cases} (r - \lambda\kappa) \frac{x_i}{2h} - \frac{\delta_i}{h^2}, & 1 \leq i \leq k-1, \\ (r - \lambda\kappa) \frac{x_k}{h+h_{k+1}} - \frac{2\delta_k}{h(h+h_{k+1})}, & i = k, \\ (r - \lambda\kappa) \frac{x_i}{h_i+h_{i+1}} - \frac{2\delta_i}{h_i(h_i+h_{i+1})}, & k+1 \leq i \leq m+k-2. \end{cases} \quad (21)$$

$$\beta_i = \begin{cases} r + \lambda + \frac{2\delta_i}{h^2}, & 1 \leq i \leq k-1, \\ r + \lambda + \frac{2\delta_k}{hh_{k+1}}, & i = k, \\ r + \lambda + \frac{2\delta_i}{h_i h_{i+1}}, & k+1 \leq i \leq m+k-2. \end{cases} \quad (22)$$

$$\gamma_i = \begin{cases} -(r - \lambda\kappa) \frac{x_i}{2h} - \frac{\delta_i}{h^2}, & 1 \leq i \leq k-1, \\ -(r - \lambda\kappa) \frac{x_k}{h+h_{k+1}} - \frac{2\delta_k}{h(h+h_{k+1})}, & i = k, \\ -(r - \lambda\kappa) \frac{x_i}{h_i+h_{i+1}} - \frac{2\delta_i}{h_i(h_i+h_{i+1})}, & k+1 \leq i \leq m+k-2. \end{cases} \quad (23)$$

$$f_{ij} = \begin{cases} \frac{\lambda}{2x_i} h q_{i,0}, & j = 1, \\ \frac{\lambda}{x_i} h q_{i,j-1}, & 2 \leq j \leq k, \\ \frac{\lambda}{2x_i} (h + \theta A) q_{i,k}, & j = k+1, \\ \frac{\lambda \theta}{x_i A} q_{i,j-1} x_{j-1}^2, & k+2 \leq j \leq m+k. \end{cases}$$

$$1 \leq i \leq m+k-2. \quad (24)$$

右端项 y 可以从期权值满足的初值条件、边界条件中获得.

2.3 离散时间项

令 $v_\tau = \frac{v^n - v^{n-1}}{\Delta\tau}$, $v^{n,\omega} = \omega v^n + (1-\omega)v^{n-1}$. 那么方程(20)就转化为如下的形式:

$$\left(\frac{1}{\Delta\tau}I + \omega S\right)v^n = \left(\frac{1}{\Delta\tau}I - (1-\omega)S\right)v^{n-1} + y, \quad n = 1, 2, \dots, l. \quad (25)$$

当 $\omega=1$ 时, 得到的就是求解欧式期权的隐式欧拉(IE)格式, 当 $\omega=\frac{1}{2}$ 时, 得到的就是求解欧式期权的 Crank-Nicolson(CN)格式. 对于欧式期权, 用广义最小残量法(GMRES)方法求解方程(25). 针对美式看跌期权问题, 在式(25)中令

$$B = \frac{1}{\Delta\tau}I + \omega S, \quad C = \frac{1}{\Delta\tau}I - (1-\omega)S,$$

$\omega=1$ 或者 $\omega=\frac{1}{2}$, 则式(8)变为一系列时间层上的线性互补问题, 即:

$$\begin{cases} Bv^n \geq Cv^{n-1} + y, \\ v^n \geq g, \\ (Bv^n - Cv^{n-1} - y) \cdot (v^n - g) = 0. \end{cases} \quad (26)$$

其中 $n=1, \dots, l$, 向量 g 包含了收益函数 $g(x)$ 在网格点处的函数值. 特别地, 令

$$z := v^n \geq g, \quad q := Bg - Cv^{n-1} - y,$$

则式(26)变为标准的线性互补问题. 本文将采用模超松弛迭代法^[14]求解式(26).

3 稳定性分析

定理 1 当模型参数满足 $r > 0$ 和 $\sigma^2 \geq r - \lambda\kappa > 0$ 时, 矩阵 $E - \lambda I$ 是一个对角元素为正的严格对角占优 M -矩阵, 即对任意的 $i, j=1, 2, \dots, m+k-2$, 有:

$$\sum_j (E - \lambda I)_{i,j} > 0, \quad E_{i,j} \leq 0, \quad \forall j \neq i.$$

证明: 由式(22)~(23)可知: 当 $r - \lambda\kappa > 0$ 时, $\beta_i > 0$ 且 $\gamma_i \leq 0$. 下面证明矩阵 E 的非对角元 α_i 是非正的. 由式(15)和式(21)可知: 当 $i=2$ 时, 因为 $\frac{x_2}{h} \geq 1, \sigma^2 \geq r - \lambda\kappa$, 所以

$$\alpha_2 = \frac{x_2}{2h} \left(r - \lambda\kappa - \sigma^2 \frac{x_2}{h} \right) < 0.$$

当 $3 \leq i \leq k-1$ 时, $\frac{x_i}{h} \geq 1$, 则:

$$\alpha_i = \frac{x_i}{2h} \left(r - \lambda\kappa - \sigma^2 \frac{x_i}{h} \right) < 0,$$

当 $i=k$ 时, $\frac{x_k}{h} \geq 1$, 则:

$$\alpha_k = \frac{x_k}{h+h_{k+1}} \left(r - \lambda\kappa - \sigma^2 \frac{x_k}{h} \right) < 0,$$

当 $k+1 \leq i \leq m+k-2$ 时, $\frac{x_i}{h_i} \geq 1$, 则:

$$\alpha_i = \frac{x_i}{h_i+h_{i+1}} \left(r - \lambda\kappa - \sigma^2 \frac{x_i}{h_i} \right) < 0.$$

另外, 由于

$$\beta_i + \alpha_i + \gamma_i = r + \lambda,$$

即, $\sum_j (\mathbf{E} - \lambda \mathbf{I})_{i,j} = r > 0$. 定理得证.

定理 2 矩阵 $\lambda \mathbf{I} - \mathbf{F}$ 是一个非负对角占优的 Z -矩阵, 即

$$\sum_j (\lambda \mathbf{I} - \mathbf{F})_{i,j} \geq 0, \quad -\mathbf{F}_{i,j} \leq 0, \quad \forall j \neq i.$$

其中 $i=1, 2, \dots, m+k-2; j=2, \dots, m+k-1$.

证明: 当 $\lambda=0$ 时, 得 $\lambda \mathbf{I} - \mathbf{F} = 0$, 定理的结论显然成立. 下面讨论 $\lambda > 0$ 的情况.

由式(24)可知, $-\mathbf{F}$ 的非对角元都是非负的. 当 $i=1, 2, \dots, m+k-2$ 时, 矩阵 $\lambda \mathbf{I} - \mathbf{F}$ 的第 i 行的行和等于

$$\begin{aligned} & \lambda \left(\sum_{j=2}^{k-1} \frac{h}{x_i} q_{i,j} + \frac{h+\theta A}{2x_i} q_{i,k} + \sum_{j=k+1}^{k+m-1} \frac{\theta}{Ax_i} q_{i,j} x_j^2 \right) \leq \\ & \lambda \left(\frac{h}{2x_i} q_{i,0} + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{h}{x_i} q_{i,j} + \frac{h+\theta A}{2x_i} q_{i,k} + \right. \\ & \left. \sum_{j=k+1}^{k+m-1} \frac{\theta}{Ax_i} q_{i,j} x_j^2 \right) = \lambda \left\{ \frac{1}{x_i} \left[h \left(\frac{1}{2} q_{i,0} + \sum_{j=1}^{k-1} q_{i,j} + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{1}{2} q_{i,k} \right) + \frac{\theta}{A} \left(\frac{1}{2} q_{i,k} x_k^2 + \sum_{j=k+1}^{k+m-1} q_{i,j} x_j^2 \right) \right] \right\} \approx \\ & \lambda \left[\frac{1}{x_i} \left(\int_0^\infty q \left(\frac{\phi}{x_i} \right) d\phi \right) \right] = \lambda \int_0^\infty q(\eta) d\eta = \lambda. \end{aligned}$$

由此可得: $(-\mathbf{F}u)_i \geq -\lambda$, 从而第一个不等式得证, 定理证毕.

由定理 1 和定理 2 可得如下推论.

推论 1 当模型参数满足 $r > 0$ 和 $\sigma^2 \geq r - \lambda\kappa > 0$ 时, 半离散矩阵 $\mathbf{S} = \mathbf{E} - \mathbf{F}$ 是一个对角元素为正的严格对角占优 M -矩阵.

推论 2 当模型参数满足 $r > 0$ 和 $\sigma^2 \geq r - \lambda\kappa > 0$ 时, 且时间步长 $\Delta\tau$ 充分小时, 采用 IE 和 CN 离散格式得到的全离散矩阵 $\frac{1}{\Delta\tau} \mathbf{I} + \omega \mathbf{S}$ 是一个对角元素为正的严格对角占优 M -矩阵.

推论 2 说明了全离散方程(25)满足离散极大值原理且离散是单调的.

定理 3 当模型参数满足 $r > 0$ 和 $\sigma^2 \geq r - \lambda\kappa > 0$ 时, 隐式双离散格式(25)是稳定的.

证明: 把数值格式(25)转化为:

$$(\mathbf{I} + \omega \Delta\tau \cdot \mathbf{S}) \mathbf{v}^n = (\mathbf{I} - (1 - \omega) \Delta\tau \cdot \mathbf{S}) \mathbf{v}^{n-1} + \Delta\tau \cdot \mathbf{y}.$$

$\omega=1$ 或者 $\omega=\frac{1}{2}$. 由推论 1 知, 矩阵 \mathbf{S} 的每一个特征值都是大于 0 的. 那么, 矩阵 $\mathbf{I} + \omega \Delta\tau \cdot \mathbf{S}$ 的每一个特征值都大于 1. 又由于矩阵 $\frac{1}{\Delta\tau} \mathbf{I} + \omega \mathbf{S}$ 是一个对角元素为正的严格对角占优 M -矩阵, 则它的逆矩阵的每个特征值都位于 $(0, 1)$ 区间. 所以, $\left\| \left(\mathbf{I} + \frac{1}{2} \Delta\tau \cdot \mathbf{S} \right)^{-1} \right\|_2 < 1$. 因此, 只要模型参数满足 $r > 0$ 和 $\sigma^2 \geq r - \lambda\kappa > 0$, 隐式双离散格式就是稳定的.

4 数值实验

这一节, 通过数值实验验证隐式双离散方法求解 Merton 跳扩散期权定价模型的有效性. 所有的计算均在一台 CPU 为 2.5 GHz 和内存为 4 GB 的机器完成的.

4.1 欧式期权

考虑 GMRES 方法求解欧式期权的价值, 模型参数取:

$$\begin{aligned} x_{\min} &= 0.0001, \quad r = 0.04, \quad \sigma = 0.16, \\ \mu &= 0.1, \quad \gamma = 0.3, \quad \lambda = 0.1, \\ K &= 10, \quad T = 1, \quad A = 30. \end{aligned} \quad (27)$$

注意到模型参数满足 $r > 0$ 和 $\sigma^2 \geq r - \lambda\kappa > 0$, 所以数值格式是稳定的.

图 1 给出了 4 种不同的离散格式求解的欧式看涨和看跌期权的价值曲线图, 从中可以看出隐式双离散方法求解期权是单调的并且是稳定的, 非常接近精确解. 另一方面, 显式格式在求解时出现了振荡, 说明隐式双离散方法是优于显式方法的.

图 2 中的 4 个子图分别是隐式双离散方法求解欧式看跌期权所得的期权价值曲面和最后一个时间层上的期权值、Delta 值和 Gamma 值. 从图中不难看出, 隐式双离散方法求解欧式期权是有效的且稳健的.

4.2 美式看跌期权

本小节, 考虑隐式双离散方法结合 MSOR 方法求解美式看跌期权, 且模型参数与式(27)取值相同.

模超松弛迭代法中的参数矩阵 $\mathbf{\Omega}$ 和松弛因子 α 分别取: $\mathbf{\Omega} = \alpha \mathbf{D}$ 和 $\alpha = 1.2$. 收敛准则为 $\| \min(\mathbf{Bz}^p$

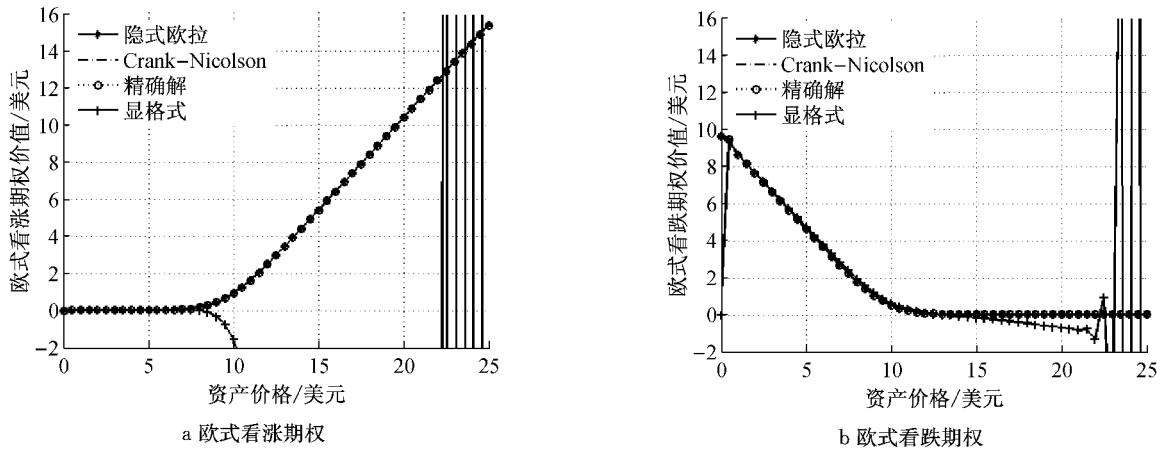


图 1 欧式看涨和看跌期权

Fig.1 European call option and European put option.

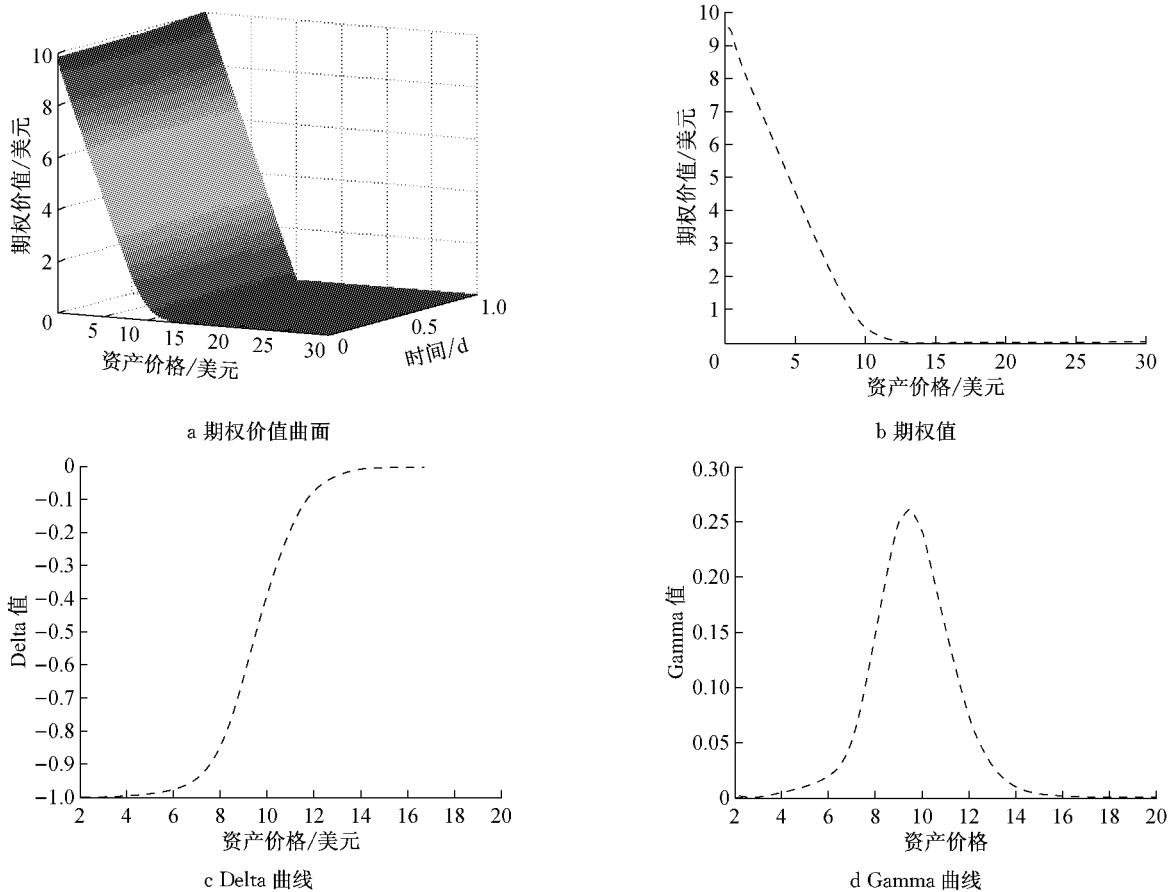


图 2 欧式看跌期权

Fig.2 European put option

$+q, z^p) \|_2 < t_{ol}$, 其中 $t_{ol} < 10^{-6}$, 或者 p 达到最大迭代步数, 比如: 1 000 步. z^p 表示第 p 步的数值解. 定义相对误差的计算公式为 $E_{\text{ror}} = \|v - v^*\|_2 / \|v^*\|_2$, 其中 $\|\cdot\|_2$ 表示向量的 2 范数, v 和 v^* 分别为 $t=0$ ($\tau=T$) 时刻的数值解和参考精确解, 这里的参考精确解是在精细网格 $(m, k, l) = (1\ 920, 800, 1\ 600)$ 上计算的数值解.

表 1 列出了隐式欧拉 (IE) 和 Crank-Nicolson (CN) 两种格式结合模超松弛迭代法求解期权价值的平均迭代步数 (IT), 时间 (CPU) 和相对误差 (记为 ' E_{ror} '). 由表可以看出, 隐式欧拉和 Crank-Nicolson 两种格式求得的数值解均随着网格剖分数的增大而变得更加精确. Crank-Nicolson 格式结合模超松弛迭代法求解期权价值所需的迭代步数和时

间少于隐式欧拉结合模超松弛迭代法求解期权价值所需的迭代步数和时间,而且前者求解的精度远高于后者的求解精度.所以在绘制美式看跌期权价值

及相关图形的时候,选取的方法是 Crank-Nicolson 格式结合模超松弛迭代的方法.

表 1 两种格式的误差,迭代步数和所需 CPU 时间

Tab.1 Comparison of two schemes on iteration number, CPU time and Error

(m, k, l)	IE			CN		
	IT	CPU	$E_{\text{error}}/10^{-4}$	IT	CPU	$E_{\text{error}}/10^{-4}$
(60,50,50)	12.9	0.02	8.79	11.8	0.02	7.53
(120,100,100)	17.1	0.13	3.30	13.6	0.13	1.88
(240,200,200)	32.7	4.64	1.79	18.6	3.20	0.508
(480,400,400)	69.3	74.25	0.861	36.5	44.2	0.143
(960,400,800)	149.87	750.13	0.165	77.12	452.50	0.0286

图 3 中的 4 个子图分别是双离散的 Crank-Nicolson 格式结合模超松弛迭代法求解美式看跌期权所得的期权价值曲面和最后一个时间层上的期权

值、Delta 值和 Gamma 值. 从图中不难看出,隐式双离散方法在求解美式期权价值时是有效的且稳定的.

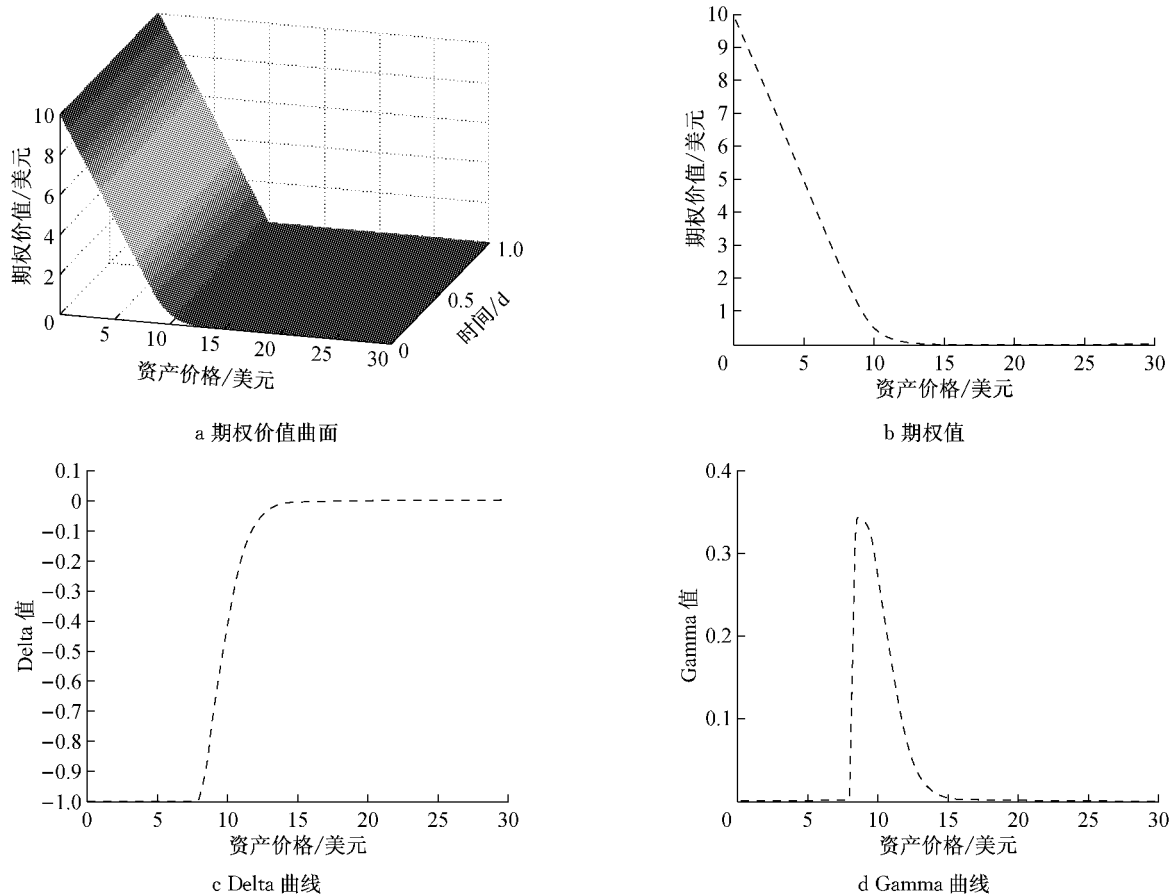


图 3 美式看跌期权

Fig.3 American put option

5 结论

本文主要研究隐式双离散方法求解欧式和美式 Merton 跳扩散期权定价模型. 分析了方法的稳定性. 数值实验验证了该方法的高效性和稳健性.

参考文献:

[1] Black F, Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities[J]. Journal of Political Economy, 1973, 81(3): 637.
 [2] Heston S L. A closed-form solution for options with stochastic

- volatility with applications to bond and currency options[J]. *Review of Financial Studies*, 1993, 6(2):327.
- [3] Dupire B. Pricing with a smile[J]. *Risk Magazine*, 1994, 7(1):18.
- [4] Merton R C. Option pricing when underlying stock return are discontinuous[J]. *Journal of Financial Economics*, 1976, 3(1-2):125.
- [5] Zhang X L. Numerical analysis of American option pricing in a Jump diffusion model [J]. *Mathematics of Operations Research*, 1997, 22(3):668.
- [6] dHalluin Y, Forsyth P A, Vetzal K R. Robust numerical methods for contingent claims under jump diffusion processes [J]. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 2005, 25(1): 87.
- [7] Tavella D, Randall C. *Pricing Financial Instruments*[M]. New York: Wiley, 2000.
- [8] Sachs E W, Strauss A K. Efficient solution of a partial integro-differential equation in finance [J]. *Applied Numerical Mathematics*, 2008, 58(11):1687.
- [9] Casaban M C, Company R, Jodar L, Romero J V. Double discretization difference schemes for partial integro-differential option pricing jump diffusion models[J]. *Abstract and Applied Analysis*, 2012, doi: 10.1155/2012/120358.
- [10] Zheng N, Yin J F. On the convergence of projected triangular decomposition methods for pricing American options with stochastic volatility[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2013, 223(3):411.
- [11] Zheng N, Yin J F. Accelerated modulus-based matrix splitting iteration methods for linear complementarity problem [J]. *Numerical Algorithms*, 2013, 64(2): 245.
- [12] Gan X T, Yin J F. Symmetric finite volume element approximations of second order linear hyperbolic integro-differential equations [J]. *Computers and Mathematics with Applications*, 2015, 70(10): 2589.
- [13] 甘小艇, 殷俊锋, 李蕊. 有限体积法定价跳扩散期权模型[J]. *同济大学学报:自然科学版*, 2016, 44(9): 1458.
GAN Xiaoting, YIN Junfeng, LI Rui. Finite volume methods for pricing jump-diffusion options model[J]. *Journal of Tongji University; Natural Science*, 2016, 44(9): 1458.
- [14] Bai Z Z. Modulus-based matrix splitting iteration methods for linear complementarity Problems [J]. *Numerical Linear Algebra with Applications*, 2010, 17(6): 917.

~~~~~

(上接第 280 页)

- YANG Shanxue. New evolutionary algorithms for multiobjective optimization problems [D]. Xi'an: Xidian University, 2007.
- [10] Fang J, Gao Y, Sun G, *et al.* Multiobjective reliability-based optimization for design of a vehicledoor[J]. *Finite Elements in Analysis & Design*, 2013, 67(5):13.
- [11] Fang J, Gao Y, Sun G, *et al.* Multiobjective sequential optimization for a vehicle door using hybrid materials tailor-welded structure [J]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 2015, 230(17): 69.
- [12] Sun G, Li G, Gong Z, *et al.* Radial basis functional model for multi-objective sheet metal forming optimization [J]. *Engineering Optimization*, 2011, 43(12): 1351.
- [13] 宋保维, 李楠. iSIGHT 在多目标优化问题中的应用研究[J]. *火力与指挥控制*, 2008(S2):133.  
SONG Baowei, LI Nan. Application research of iSIGHT in solving multi-objective design optimization problems[J]. *Fire Control and Command Control*, 2008(S2):133.