

碎石道床沉降的离散元分析

邵文杰, 练松良, 杨新文

(同济大学 道路与交通工程教育部重点实验室, 上海 201804)

摘要: 针对凸多面体颗粒, 提出了基于最小投影的粒径评估方法, 并与体积评估法和垂直于最小惯性主轴的最小包围正方形评估法进行了对比分析. 最后, 利用基于最小投影的粒径评估法对道砟颗粒进行粒径评估, 并建立了单一粒径级配和指定宽粒径级配的道砟颗粒堆积体, 分析了不同颗粒级配对道砟沉降的影响. 结果表明: 基于最小投影的最小包围矩形粒径评估法比体积评估法和最小包围正方形评估法更精确; 道砟初始堆积密度为 $1.55 \text{ g} \cdot \text{m}^{-3}$ 时, 宽粒径级配颗粒的轨枕累积沉降值比单一粒径级配的轨枕累积沉降值要小, 而且级配单一的大粒径颗粒的轨枕累积沉降值要比级配单一的小粒径的轨枕累积沉降值要大.

关键词: 道床沉降; 离散元法; 粒径级配; 粒径识别

中图分类号: U213.72

文献标志码: A

Analysis of Railway Ballast Settlement with Discrete Element Method

SHAO Wenjie, LIAN Songliang, YANG Xinwen

(Key Laboratory of Road and Traffic Engineering of the Ministry of Education, Tongji University, Shanghai 201804, China)

Abstract: Based on a model of convex polyhedron ballast, a method for evaluation of the particle size is proposed under the condition of minimal shadow area of it. By contrast with the evaluation methods of particle volume and minimum bounding square perpendicular to the principal axis of minimum moment of inertia, a detailed analysis of the above-mentioned method is carried out. Then the particle size of ballast particle is evaluated through using it. By establishing the accumulation masse of ballast particles with single and broad particle size distribution, the influence of different particle size distributions on the ballast settlement is analyzed. The results show that the proposed evaluation method in this paper provides a more accurate evaluation for the particle size of ballast particle. When the initial packing density of ballast is $1.55 \text{ g} \cdot \text{m}^{-3}$, the value of accumulated

settlement of sleeper with broad particle size distribution is less than the one with single particle size distribution. And the value of accumulated settlement of sleeper with a large particle size is greater than the one with a small particle size.

Key words: ballast settlement; discrete element method; particle size distribution; particle size evaluation

道砟颗粒粒径级配对道砟力学行为具有显著影响, 为了在离散元数值模拟过程中反映颗粒级配的影响, 需要建立准确评估颗粒粒径的方法.

目前, 采用离散元法研究道砟力学行为主要有三种道砟颗粒模型, 分别为球簇模型^[1-4] (clump)、球体组合模型^[5-7] (cluster) 和多面体道砟颗粒模型^[8-13]. 前两种道砟颗粒模型由 McDowell 提出^[5], 在道床数值模拟研究中得到了广泛应用, 而多面体道砟颗粒模型的相关研究较少. 其中, Tutumluer 等^[14]利用数字成像技术, 对真实道砟颗粒扫描生成了凸多面体道砟颗粒模型, 由于是对真实颗粒的扫描, 故颗粒模型的粒径可由真实颗粒筛分实验得到, 但是若要生成不同级配曲线的颗粒, 则需要扫描大量的颗粒, 工作量庞大. Eliás^[11]利用计算几何理论的 Voronoi tessellation 方法生成凸多面体道砟颗粒模型, 并利用垂直于最小惯性主轴的最小包围正方形评估颗粒粒径, 但颗粒在垂直于最小惯性主轴的平面上的投影并不总是最小投影, 而且以投影的最小包围正方形为筛分尺寸, 对较细长的扁平颗粒无法准确评价. 另外, 还有一种按照体积评估的简便方式, 该方式无法考虑颗粒的形状, 粒径评估误差较大. 现有的粒径评估方法无法准确估计凸多面体道砟颗粒的粒径.

因此, 本文针对凸多面体道砟颗粒模型, 提出了基于最小投影的最小包围矩形的粒径评估方式; 并

收稿日期: 2016-07-21

基金项目: 国家自然科学基金(No.51378395)

第一作者: 邵文杰(1988—), 男, 博士生, 主要研究方向为有砟轨道结构与道砟散体力学. E-mail: vincent700@163.com

通讯作者: 杨新文(1973—), 男, 工学博士, 副教授, 博士生导师, 主要研究方向为列车与线路系统动力学.

E-mail: xinwenyang@tongji.edu.cn

详细描述了构建指定级配曲线道砟堆积体的方法. 最后, 利用该方式构建单一粒径级配和指定宽粒径级配的道砟颗粒堆积体, 分析颗粒级配对道砟沉降的影响.

1 道砟粒径识别方法

1.1 凸多面体道砟颗粒的最小投影

选取的平面位置不同, 多面体颗粒在该平面的投影面积不同, 若所有的投影中最小投影都不能被指定尺寸的方孔包含, 那么这个多面体道砟颗粒不能通过方孔. 因此, 判断一个不规则的凸多面体道砟颗粒是否能够通过固定的方孔筛, 就转变成判断凸多面体道砟颗粒的最小投影能否被方孔包含. 为了实现不规则的凸多面体道砟颗粒的粒径评估, 首先需要求解凸多面体道砟颗粒模型的最小投影. 下面详细介绍凸多面体道砟颗粒模型的最小投影求解方法.

为便于理解, 以四面体为例说明最小投影的计算方法. 首先建立如图 1a 所示的四面体, f_1, f_2, f_3 和 f_4 为四面体的 4 个面, 过坐标系原点分别做平行于四面体四个面的平行面, 则四个平行面将空间分割为 14 个锥形区域, 图 1a 中点画线围成的区域为其中一个锥形区域. 现只针对该锥形区域进行分析, 其中四面体的外法向向量分别为 n_{f1}, n_{f2}, n_{f3} 和 n_{f4} , 如图 1b 所示. 令这四个外法向向量的模长分别等于其对应面的面积.

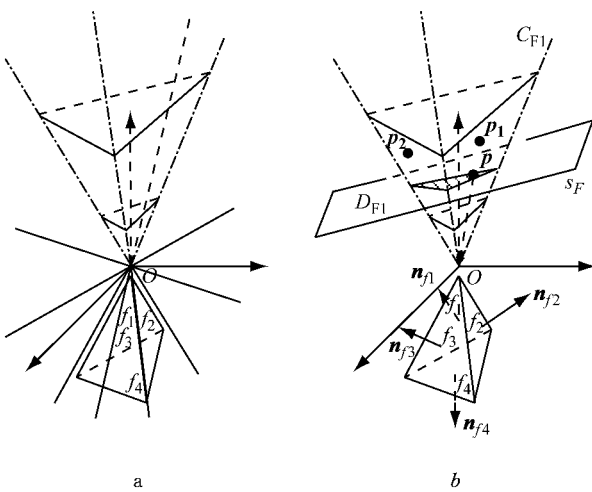


图 1 四面体最小投影求解示意图

Fig. 1 Schematic diagram of the solution to the minimal shadow of tetrahedron

一个平面的外法向向量为 n , 若点 $p(x, y, z)$ 使 $p \cdot n > 0$, 则点 p 位于该面的正面, 且该面为点 p 的

可视面. 由可视面的定义可知, 锥形区域 C_{F1} 中点 p_1 和点 p_2 的可视面均为面 f_1, f_2 和 f_3 . 推广到整个锥形区域 C_{F1} , 该区域内所有点的可视面均为面 f_1, f_2 和 f_3 . 为方便推导, 定义锥形区域 C_{F1} 的可视集 $F_1 = \{f_1, f_2, f_3\}$, 且锥形区域 C_{F1} 可表示如下:

$$n_{F_1} = \sum_{f \in F_1} n_f \quad (1)$$

对于任意的单位向量 e , 从该单位向量看过去, 面 f 的阴影面积为 $n \cdot e$, 其中 n 为面 f 的外法向向量, 模长为该面的面积.

现假设锥形区域 C_{F1} 中任意一个单位向量 u , 则四面体的投影面积 S 为

$$S = \sum_{f \in F_1} u \cdot n_f = u \cdot \sum_{f \in F_1} n_f = u \cdot n_{F_1} \quad (2)$$

建立平面 S_{F1} , 平面方程为: $p \cdot n_{F1} = 1$, 则该平面与锥形区域 C_{F1} 的交为三角形阴影区域 D_{F1} , 如图 1b 中阴影区域所示. 若点 p 在 D_{F1} 上, 则由公式(2)可得沿 pO 方向四面体的投影面积 s_1 :

$$s_1 = n_{F_1} \cdot p / |p| = 1 / |p| \quad (3)$$

要使 s_1 取得最小值, 则 $|p|$ 取得最大值, 即在 D_{F1} 中找到距离原点 O 最远的点. 因此, 只需要遍历所有的锥形区域 C_F , 并在与锥形区域对应的三角形区域 D_F 中, 找出距离原点 O 最远的点即可得到四面体的最小投影面积.

寻找多面体最小投影的方法由 Mckenna^[15] 提出, 但针对凸多面体道砟颗粒, 利用公式(3)推出的结论可以得到另外一个比较实用的结论.

依然以图 1b 进行说明, 注意到原点 O 到平面 S_{F1} 的距离是定值, 因而在 D_{F1} 中距离原点 O 最远的点, 必然是 D_{F1} 区域边界顶点中的一个, 即图 1b 中三角形阴影区域的三个顶点之一. 另外, 锥形区域 C_{F1} 是由平行于四面体的面分割空间而形成, 则图 1b 图中画阴影线的三角形的三个顶点分别和原点 O 的连线必然与四面体的相应边平行或者共线. 因此只需要以四面体的 6 条边为投影方向, 计算各个投影方向的投影面积, 比较这些投影面积值, 即可找出四面体的最小投影. 对于凸多面体而言, 该结论依然成立, 只需以凸多面体的边为投影方向, 从所有投影面积中找出最小值, 其对应的投影方向为最小投影方向.

1.2 投影的最小包围矩形

根据第 1.1 节最小投影计算理论可知, 凸多面体的投影为凸多边形. 判断凸多边形与筛孔的包含关系比较困难, 而利用凸多边形的最小包围矩形, 可以很简单地判断最小包围矩形与正方形筛孔之间的

关系,从而确定凸多面体能否通过筛孔。

根据 Freeman^[16]提出的二维凸包最小包围矩形定理:二维凸包的最小包围矩形中有一条边与该凸包的一条边共线. 因此求解一个二维凸包的最小包围矩形,只需要依次遍历该凸包的每一条边,计算对应的包围矩形,从所有包围矩形中选取面积最小的矩形,求解步骤如下:

步骤 1:一个多面体道砟颗粒模型的投影,其形状为凸多边形,假设该凸多边形按逆时针排序的顶点集为 $V = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$;依据顶点顺序计算每条边的向量 $b_i = p_{i+1} - p_i, i = 1, 2, \dots, n-1$,而 $b_n = p_1 - p_n$,其集合为 $b = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$,见图 2,虚线箭头方向为有向边 b 走向。

步骤 2:计算每条边向量的单位向量 e :

$$e = \{e_i \mid e_i = b_i / |b_i|, b_i \in b\} \quad (4)$$

步骤 3:选取其中一条边,如 b_i ,计算该边起点 p_i 到其他点的向量 $a_{i,j}$:

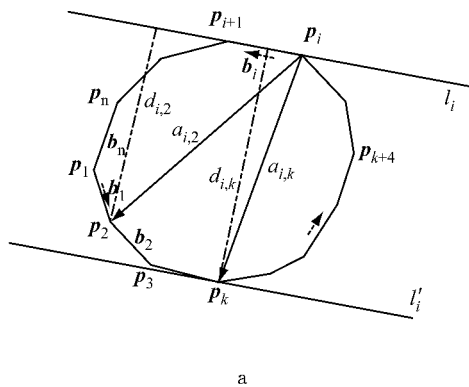
$$a_{i,j} = p_j - p_i, i \neq j, j = 1, 2, \dots, n \quad (5)$$

如图 2a 中 $a_{i,2}$ 表示点 p_i 到点 p_2 的向量;

步骤 4:计算每个点到边 b_i 所在直线 l_i 的距离,并找出距离直线 l_i 最远的点 p_k ,计算最大距离 $d_{i,max}$,其值为包围矩形的一条边长 $L_i = d_{i,max}$,例如图 2a 中 $d_{i,k}$;

$$d_{i,j} = |a_{i,j} \times e_i|, i \neq j, j = 1, 2, \dots, n \quad (6)$$

$$d_{i,max} = \max(d_{i,j}) \quad (7)$$



步骤 5:过点 p_k 作平行于直线 l_i 的直线 l'_i ,计算点 p_k 到其他点的向量 $c_{k,j}$,

$$c_{k,j} = p_j - p_k, j \neq k, j = 1, 2, \dots, n \quad (8)$$

如图 2b 中, $c_{k,i+1}$ 表示点 p_k 到点 p_{i+1} 的向量;

步骤 6:计算其他点与点 p_k 连线在直线上 l'_i 的投影 $d'_{k,j}$:

$$d'_{k,j} = c_{k,j} \cdot e_j, j \neq k, j = 1, 2, \dots, n \quad (9)$$

步骤 7:确定包围矩形的另外一条边长,由向量的数量积可知, $d'_{k,j}$ 的值有正有负,将正负数分成两个集合,分别为 H_i 和 H'_i . 取负数的最小值和正数的最大值,并计算两者绝对值和,该值为包围矩形的另外一条边长 $L_{i,2}$. 例如图 2b 中 $d'_{k,1}$ 是正的最大值, $d'_{k,k+4}$ 是负的最小值:

$$H_i = \{d'_{k,j} \mid d'_{k,j} > 0, k \neq j, j = 1, 2, \dots, n\} \quad (10)$$

$$H'_i = \{d'_{k,j} \mid d'_{k,j} < 0, k \neq j, j = 1, 2, \dots, n\} \quad (11)$$

$$L_{i,2} = |\min(H'_i)| + \max(H_i) \quad (12)$$

步骤 8:计算包围矩形面积 S_i :

$$S_i = L_{i,1} \cdot L_{i,2} \quad (13)$$

步骤 9:遍历所有边,重复步骤 3~步骤 8 的过程,计算对应的包围矩形面积,从这些包围矩形中找出面积最小的,即为所求的最小包围矩形, $S_{min} = \min(S_i), i = 1, 2, \dots, n$

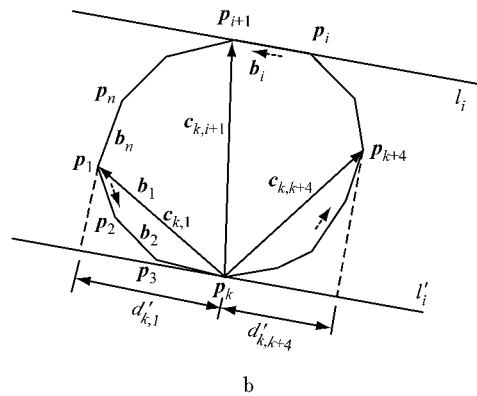


图 2 最小包围矩形求解示意图

Fig.2 Schematic diagram of the solution to the minimum bounding rectangle

求出最小投影的包围矩形面后,利用最小包围矩形与铁路碎石道砟规范规定的相应筛孔尺寸进行比较即可判断该多面体道砟颗粒是否通过相应的筛孔,进而判断颗粒的粒径。

1.3 粒径评估方法对比分析

Jan Eliás^[11]在文章中提到了两种评估多面体颗

粒粒径的方法,一种是利用体积进行估计,另外一种是先求出颗粒在垂直于最小主惯性轴平面内的投影,再求该投影的最小包围正方形,以最小包围正方形为筛分尺寸. 为了验证本文粒径评估方法的有效性和精确性,以两个简单的长方体颗粒为例,同 Jan Eliás 提到的两种粒径评估方法进行对比分析:

例 1:假设一个长方体颗粒边长为 $62\text{ mm} \times 62\text{ mm} \times 100\text{ mm}$, 则该长方体颗粒的体积 $V = 384\ 400\text{ mm}^3$. 首先按体积评估粒径, 若采用等体积的立方体, 则立方体的边长为 $b = \sqrt[3]{V} = 72.7\text{ mm}$, 若采用等体积球, 则球体的直径为 $D = \sqrt[3]{6V/\pi} = 90.2\text{ mm}$. 由此可知, 采用体积评估的方式, 该长方体颗粒无法通过筛孔边长为 63 mm 的筛孔, 这与实际情况不符. 若按照最小包围正方形进行评估, 最小惯性主轴如图 3a 所示, 则长方体颗粒在垂直于该最小惯性主轴的平面上的投影正好为 $62\text{ mm} \times 62\text{ mm}$ 的正方形, 故该正方形为最小包围正方形, 颗粒粒径小于 63 mm . 按照本文提出的方法, 凸多面体最小投影面积的投影方向一定沿着凸多面体某一条边的方向, 对于本例的长方体, 最小投影的投影方向沿着长方体的长边, 正好和最小惯性主轴平行, 见图 3b; 则最小投影的最小包围矩形也正好是 $62\text{ mm} \times 62\text{ mm}$, 能够通过 63 mm 的筛孔, 粒径也是小于 63 mm .

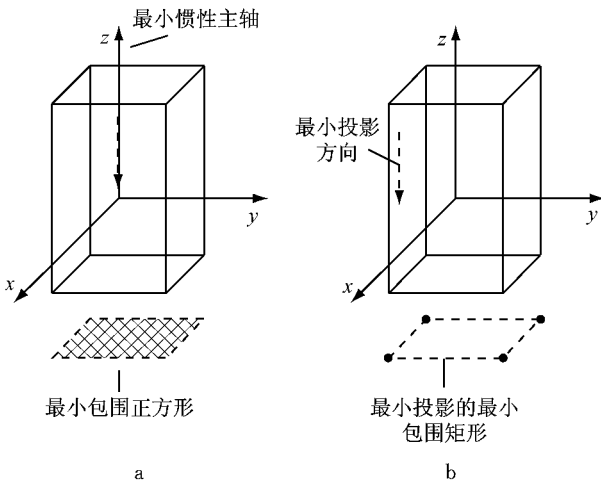


图 3 细长颗粒的最小包围正方形和最小包围矩形
Fig. 3 Minimum bounding square and rectangle of the slender ballast

例 2:对于 $64\text{ mm} \times 4\text{ mm} \times 100\text{ mm}$ 的长方体颗粒, 垂直于最小惯性主轴的最小包围正方形为 $64\text{ mm} \times 64\text{ mm}$, 见图 4a, 则该颗粒的筛分尺寸是大于 63 mm 的, 则该颗粒无法通过 63 mm 的筛孔, 与实际情况不符. 若采用本文的粒径评估方法, 则最小投影的最小包围矩形为 $64\text{ mm} \times 4\text{ mm}$, 将最小包围矩形与 63 mm 的筛孔比较, 只需旋转最小包围矩形, 如图 4b 所示位置, 该颗粒可以通过 63 mm 的方孔, 因此该颗粒筛分尺寸是小于 63 mm 的. 由以上两例可知, 本文提出的最小投影的最小包围矩形评估法比较精确.

另外, 上述两例为规则的长方体颗粒, 最小惯性

主轴和最小投影方向是平行的, 而对于不规则的凸多面体颗粒, 最小惯性主轴与最小投影方向并不总是平行, 因而颗粒在垂直于最小惯性主轴的平面上的投影并不总是最小投影; 而且以投影的最小包围正方形为筛分尺寸, 对较细长的扁平颗粒无法准确评价, 因此利用垂直于最小惯性主轴的最小包围正方形评估方法评估粒径不够准确.

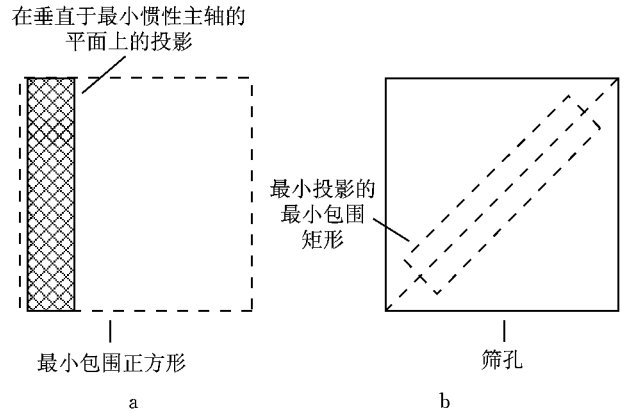


图 4 细长扁平颗粒的最小包围正方形和最小包围矩形
Fig. 4 Minimum bounding square and rectangle of the flat long and thin ballast

2 道砟颗粒级配的建立方法

铁路有砟道床是符合一定粒径级配要求的道砟颗粒堆积体, 为了在数值分析过程中真实反映道砟颗粒级配对道床动力性能的影响, 需要建立真实反映颗粒级配的道砟堆积体数值模型. 利用第 1.2 节最小投影的最小包围矩形的粒径评估方法, 对生成的随机多面体道砟颗粒模型进行粒径评估, 并按照粒径进行分类存储构建道砟颗粒模型库, 最后选取不同颗粒粒径组合, 构成指定粒径级配. 本文主要是通过道砟箱模型来研究不同粒径道砟对沉降的影响, 故下面详细描述道砟箱模型中颗粒粒径级配的数值建立过程:

以新建铁路一级碎石道砟粒径级配为例, 假定相应筛孔的过筛质量百分率见表 1, 记为 $Q_i (i=1, 2 \dots 6)$, Q_i 满足《铁路碎石道砟》规范^[17]中的相应限值.

表 1 过筛质量百分率

Tab.1 Percentage passing by mass

| 方孔筛边长/mm | 16 | 25 | 35.5 | 45 | 56 | 63 |
|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 过筛质量百分率/% | Q_1 | Q_2 | Q_3 | Q_4 | Q_5 | Q_6 |

为了方便确定各个粒径道砟颗粒的个数, 根据表 1 的一级碎石道砟粒径级配确定如表 2 所示的不

同粒径的道砟碎石质量百分率,记为 P_i $i=1,2\cdots 6$.
 $P_j=Q_{j+1}-Q_j$ $j=1,2\cdots 5$,其中 $P_0=Q_1, P_6=100-Q_6$

表 2 各种粒径颗粒的质量百分率

| j | 粒径标记 | 粒径/mm | 质量百分率/% |
|-----|-------|---------------|---------|
| 0 | R_0 | <16 | P_0 |
| 1 | R_1 | $16\sim 25$ | P_1 |
| 2 | R_2 | $25\sim 35.5$ | P_2 |
| 3 | R_3 | $35.5\sim 45$ | P_3 |
| 4 | R_4 | $45\sim 56$ | P_4 |
| 5 | R_5 | $56\sim 63$ | P_5 |
| 6 | R_6 | >63 | P_6 |

根据道砟箱尺寸初步确定道砟颗粒模型个数,设计道砟箱模型的道砟填充高度 h_d ,道砟箱长 l_d ,宽 w_d ,则道砟层设计体积为 $V_c=l_d \cdot w_d \cdot h_d$.根据文献[18],道床初期稳定的密度为 $\rho_0=1.72 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$,道砟箱模型的道砟颗粒密度 $\rho_1=2.6 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$,则道砟箱模型的枕下道砟层的空隙率 n_1 为

$$n_1 = 1 - \rho_0 / \rho_1 \quad (14)$$

利用枕下道砟层空隙率可以计算道砟颗粒占据的总体积 V_d :

$$V_d = (1 - n_1) \cdot V_c \quad (15)$$

根据表 2 可知粒径为 R_j 的颗粒体积为 V_j :

$$V_j = P_j \cdot V_d, j = 0, 1, \dots, 6 \quad (16)$$

确定每种粒径颗粒的总体积后,需要从道砟模型库中选取颗粒来组成道砟箱模型.接下来简要描述颗粒的选取过程:

步骤 1:以一级级配粒径 35.5 和 45 mm 的中间值 $d_m=40 \text{ mm}$ 为边长,粗略估算所需要的颗粒总数目 $n_{um}=V_c/d_m^3$,利用表 2 的质量百分率,初步确定粒径 R_j 所需的颗粒数目 $n_{um_j}=P_j \cdot n_{um}/100$ $j=0,1,\dots,6$;

步骤 2:从道砟颗粒模型库中随机选取粒径为 R_j 的道砟颗粒个数为 n_{um_j} ,选出来的该颗粒集合记为 S_j ;例如模型库中粒径为 35.5~45 的道砟颗粒总共有 10 000 个,按照 1,2,⋯10 000 索引号排序保存.假设需要该粒径的颗粒个数 $n_{um_3}=200$,为了保证随机性,从 1~10 000 索引整数中随机取出 200 个不同值的数,再按照选出的 200 个索引值从模型库中提取颗粒,颗粒集合记为 S_3 .

步骤 3:分别计算取出的粒径为 R_j 的颗粒总体积 V_{j_0} ,并与由级配确定的粒径为 R_j 的颗粒体积 V_j 进行比较.若 $V_{j_0} < V_j$,则从粒径 R_j 的颗粒模型库中随机选择一定数量的颗粒,使 $V_{j_0}=V_j$;若 $V_{j_0} > V_j$,则从 S_j 颗粒集合中随机选择一定数量颗粒剔除,使

$$V_{j_0}=V_j.$$

步骤 4:将 1~7 序列随机乱序排列,以该序列为索引值,将 7 个颗粒集合 S_j 整合成一个整体集合,例如 $\{S_2, S_0, S_4, S_6, S_1, S_3, S_5\}$ 这一乱序集合;

步骤 5:统计步骤 4 中颗粒总数目 n_{um_f} ,生成 1- n_{um_f} 的随机乱序序列,以该序列为索引值,将步骤 4 中形成的颗粒集合进行排序,生成了所需要的道砟箱道砟颗粒模型集合.

若实际数值仿真中含有针状颗粒和片状颗粒,只需要根据针状指数和片状指数计算相应的颗粒含量,再按照粒径适当替换步骤 4 中的颗粒就可以实现针状颗粒和片状颗粒的添加.

3 离散元数值分析方法

在进行轨枕沉降的数值模拟之前,先介绍本文采用的数值接触模型和动力方程.

3.1 接触模型

目前接触理论中,只有形状较为简单的物体之间的接触才有理论解析解,而不规则多面体颗粒之间的接触无法简单地利用弹性理论建立理论求解公式.因此,多面体颗粒之间的接触计算多采用近似计算方法.Cundall 等^[19]计算多面体颗粒的法向接触力和切向接触力,均采用了增量模式,而本文采用式(17)进行法向接触力的计算^[20]:

$$F_N = 4E \sqrt{V_1 d} / 3 \sqrt{\pi} \quad (17)$$

式中: E 为弹性模量; V_1 为颗粒间相互嵌入的体积; d 为颗粒间相互嵌入的深度, $d=d_1+d_2$,如图 5 所示.

法向接触刚度 k_n 为

$$k_n = 4E/3 \sqrt{\pi} \quad (18)$$

切向力依然采用增量模式,每一时步切向力增量为 ΔF_s ,由公式(19)计算.

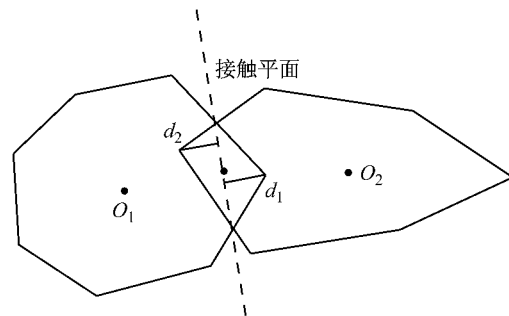


图 5 多面体颗粒相互嵌入量

Fig. 5 Schematic diagram of the interaction of polyhedron particles

$$\Delta F_s = k_s \cdot \Delta u_s \cdot A \quad (19)$$

式中: k_s 为切向刚度; Δu_s 为每一时步切向相对位移增量; A 为颗粒间接触面积.

根据文献[21]切向刚度建议值为: $k_s = 0.25k_n$.

3.2 颗粒的动力方程

假设质心为 O_1 的多面体颗粒与另外一个多面体颗粒的相接触, C 为接触点, 图 6 中 C 点所在的平面为两个颗粒接触的法向平面. 在 t_n 时刻, 颗粒 O_1 的法向接触力 F_n 和切向接触力 F_{s1} 和 F_{s2} 如图 6 所示.

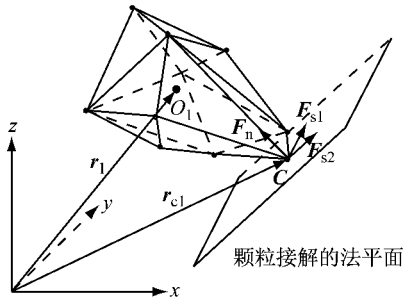


图 6 接触力示意图

Fig.6 Schematic diagram of the contact force

另外, 在 t_n 时刻, 颗粒 O_1 位置矢量为 r_1 , 接触点位置矢量为 r_{c1} , 假设作用在颗粒 O_1 上的力有外力 F_{wi} 、接触力 F_{ci} 、外力矩 M_{wi} 及自身重力 G , 其中力项的下标 i 为 1, 2, 3, 分别表示沿 x 、 y 、 z 轴方向; 力矩项的下标 i 也为 1, 2, 3, 分别表示绕 x 、 y 、 z 轴方向, 考虑接触阻尼力 F_i^d 和全局阻尼系数的平衡方程为:

$$m(\ddot{u}_i)_n = F_i + F_i^d - c_1 \dot{u}_i \quad (20)$$

$$I(\ddot{\theta}_i)_n = \sum M_{wi} + \sum F_{ci} \cdot (r_{c1} - r_1) - c_2 \dot{\theta}_i \quad (21)$$

为了方便, 令 F_i 表示未被平衡的力, 如式(22)所示:

$$F_i = \sum F_{wi} + \sum F_{ci} + G \quad (22)$$

阻尼力 $F_i^d = -F_i \lambda \text{sign}(F_i \cdot (\dot{u}_i)_n)$, 其中 λ 采用 0.4. 接触力 F_{ci} 由式(17)和式(19)计算.

利用中心差分法进行求解平衡方程, 并考虑到瑞利阻尼系数 $c_1 = \alpha m$ 和 $c_2 = \alpha I$, 则可得 $t_{n+1/2}$ 时刻的速度和角速度:

$$(\dot{u}_i)_{n+1/2} = [(\dot{u}_i)_{n-1/2} (1 - \frac{\alpha \Delta t}{2}) + \frac{F \Delta t}{m}] / (1 + \frac{\alpha \Delta t}{2}) \quad (23)$$

$$(\dot{\theta}_i)_{n+1/2} = [(\dot{\theta}_i)_{n-1/2} (1 - \frac{\alpha \Delta t}{2}) + \frac{M \Delta t}{I}] / (1 + \frac{\alpha \Delta t}{2}) \quad (24)$$

$$F = F_i + F_i^d, \quad M = \sum M_{wi} + \sum F_{ci} \cdot (r_{c1} - r_1)$$

则 t_{n+1} 时刻颗粒的位移为

$$(u_i)_{n+1} = (u_i)_n + (\dot{u}_i)_{n+1/2} \Delta t \quad (25)$$

$$(\theta_i)_{n+1} = (\theta_i)_n + (\dot{\theta}_i)_{n+1/2} \Delta t \quad (26)$$

由式(20)–(26)数值求解过程可知, 只需要确定阻尼系数 α 就可进行迭代求解. 文中采用自适应阻尼系数^[22], 假定阻尼吸收的能量为 E_a , 动能变化量为 E_k , 定义系数 R :

$$R = E_a / E_k \quad (27)$$

若 $R < 0.5$, 则 $\alpha_{\text{new}} = (1 + 0.1)\alpha_{\text{old}}$

若 $R > 0.5$, 则 $\alpha_{\text{new}} = (1 - 0.01)\alpha_{\text{old}}$

其中: α_{old} 为前一时步阻尼系数; α_{new} 为当前时步阻尼系数.

初始时刻一般取 0.1, 利用式(27)更新每一时步的阻尼系数 α .

4 粒径级配对沉降的影响分析

利用第 1 节的粒径评估方法和指定级配的建立方法, 分别建立单一级配大粒径、单一级配小粒径和宽级配粒径的道砟箱模型, 并利用离散元法分析不同粒径级配对沉降的影响.

4.1 模型参数

本文数值计算中, 模型参数见表 3.

表 3 模型参数

| Tab.3 Parameters of numerical simulation model | |
|--|--------------------|
| 参数名称 | 值 |
| 道砟颗粒密度/($\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$) | 2 600 |
| 道砟颗粒弹性模量/Pa | 4×10^{11} |
| 道砟颗粒泊松比 | 0.3 |
| 道砟颗粒间摩擦系数 | 0.67 |
| 轨枕密度/($\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$) | 2 800 |
| 轨枕弹性模量/MPa | 8×10^5 |
| 轨枕泊松比 | 0.3 |

4.2 振动捣实数值模拟

为了分析粒径级配对道砟沉降的影响, 按照第 1 节粒径识别方法和道砟颗粒级配的建立方法, 在长、宽、高分别 0.6、0.3 和 0.35 m 的空间内, 建立单一大粒径级配、单一小粒径级配和指定宽粒径级配的道砟颗粒模型, 三种级配情况见表 4.

将建立好的道砟颗粒模型, 采用重力方式进行堆积, 堆积后的道砟箱模型如图 7 所示. 为了尽可能达到初期道床稳定密度, 利用一个长方体块体模拟加载板, 对重力堆积后的道砟箱模型进行振动捣实.

在模拟振动捣实的过程中, 施加在模型加压板上的荷载最大幅值为 40 kN, 加载频率为 10 Hz, 经过振动压实后的道砟模型如图 8 所示.

表 4 模型的粒径级配

Tab.4 Size distribution of particle model

| 方孔筛边长/mm | 过筛质量百分率/% | | |
|----------|-----------|---------|-------|
| | 单一大粒径模型 | 单一小粒径模型 | 宽级配模型 |
| 16 | 0 | 0 | 0 |
| 25 | 0 | 0 | 0 |
| 35.5 | 0 | 100 | 4 |
| 45 | 0 | 100 | 33 |
| 56 | 0 | 100 | 79 |
| 63 | 100 | 100 | 95 |

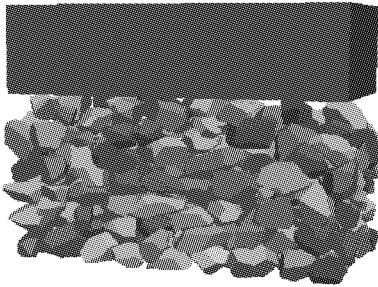


图 7 重力堆积的颗粒模型

Fig.7 Model of particle accumulation in gravity

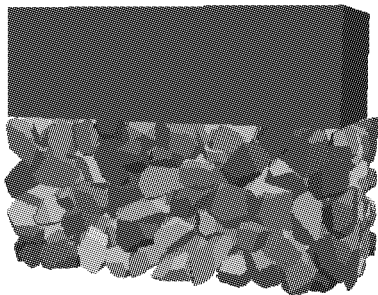


图 8 振动压实后的颗粒模型

Fig.8 Model of particle accumulation under vibrating compaction

振动捣实过程中,加载板下道砟堆积密度与空隙率随加载次数的变化如图 9—10 所示。

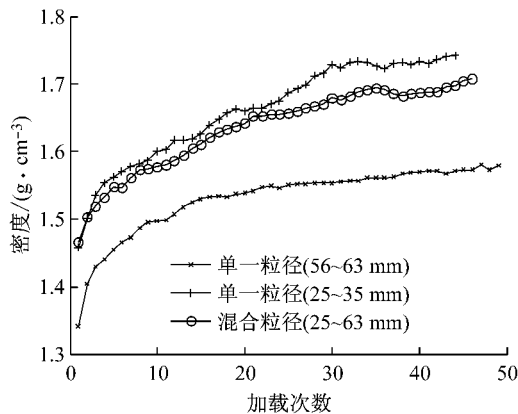


图 9 道砟堆积密度随加载次数的关系

Fig.9 Relationship between the ballast density and loading times

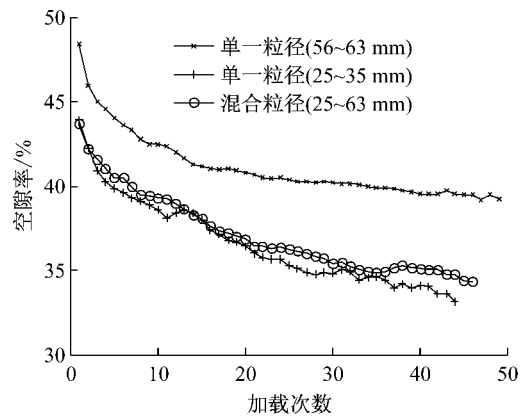


图 10 空隙率随加载次数的关系

Fig.10 Relationship between the void ratio and loading times

由图 9 和图 10 可知,随着加载次数增加枕下的道砟模型密度逐渐增加.由于重力堆积的道砟颗粒模型较松散,在加载初期,道砟模型堆积密度迅速增加,但是在加载一定次数后,道砟模型堆积密度增加速率降低了.另外,粒径较小的和宽级配的颗粒初始堆积密度比粒径大的颗粒初始堆积密度要大,而且也更容易进一步压实.经过振动捣实 45 次后,宽级配道砟颗粒堆积体的堆积密度比单一大粒径道砟颗粒堆积体的堆积密度要大,但本次模拟指定宽级配道砟堆积体的堆积密度依然没有单一小粒径的堆积密度大.

4.3 轨枕沉降数值分析

由于本文未考虑颗粒的破碎,从图 9 可知,采用 56~63 mm 单一粒径颗粒的堆积密度很难进一步增加,故在堆积密度为 $1.55 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ 时,移除加载板,添加轨枕并将轨枕两侧的空间填充道砟,最终的模型示意图如图 11 所示.在轨枕上施加一个正弦荷载,为模拟 30 t 轴重,该荷载的最大幅值由轨道结构计算得到,其值为 80 kN;最小幅值为 3 kN,加载频率为 10 Hz.记录每次加载完成轨枕的位置,计算轨

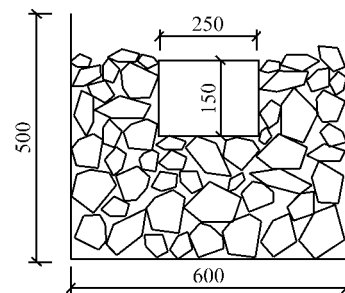


图 11 道砟箱模型示意图(单位:mm)

Fig.11 Schematic diagram of the model of ballast box (unit: mm)

枕累积沉降位移值,三种模型的轨枕累积沉降位移如图 12 所示。

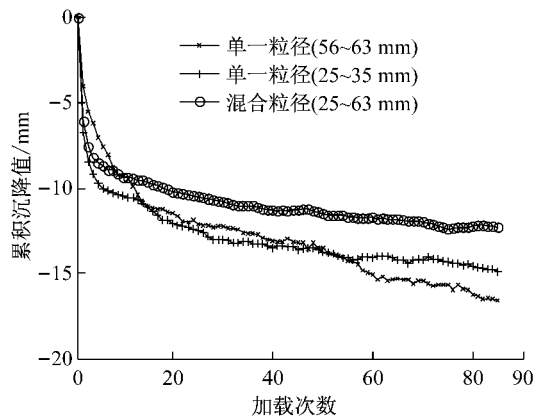


图 12 轨枕累积沉降值

Fig. 12 Accumulative settlement value of sleeper

由图 12 可知,宽级配曲线颗粒的轨枕累积沉降值比单一粒径级配的轨枕累积沉降值要小. 加载 80 次后,56~63 mm 单一大粒径颗粒的轨枕累积沉降值比 25~35.5 mm 单一小粒径颗粒的轨枕累积沉降值要大. 在加载初期,大粒径颗粒的轨枕累积沉降速率较慢.

5 结论

本文针对凸多面体道砟颗粒模型提出了一种粒径评估方法,并详细描述了指定粒径级配的构建方法. 在不考虑道砟颗粒破碎影响的情况下,分析了不同粒径道砟堆积密度和空隙率随加载次数的变化规律,以及初始密度为 $1.55 \text{ g} \cdot \text{m}^{-3}$ 时轨枕累积沉降值,得出以下结论:

(1) 本文提出的基于最小投影的最小包围矩形粒径评估法能够有效识别凸多面体道砟颗粒模型的粒径,而且比体积评估法和最小包围正方形评估法精确;

(2) 宽级配道砟颗粒堆积体和单一小粒径道砟颗粒堆积体的初始堆积密度比单一大粒径道砟颗粒堆积的初始堆积密度要大,而且更容易进一步压密;

(3) 随着振动捣实次数的增加,道砟堆积密度逐渐增加.

(4) 在振动捣实初期,堆积密度增加速率较快,而随着振动捣实次数增加,堆积密度增加速率在降低;

(5) 初始堆积密度为 $1.55 \text{ g} \cdot \text{m}^{-3}$ 时,宽级配曲线颗粒的轨枕累积沉降值比单一粒径级配的轨枕累

积沉降值要小,而且单一级配大粒径颗粒的轨枕累积沉降值要比单一级配小粒径的轨枕累积沉降值要大.

参考文献:

- [1] Lu M, McDowell G R. The importance of modelling ballast particle shape in the discrete element method[J]. *Granular Matter*, 2007, 1(1):69.
- [2] Ngo N T. Deformation of coal fouled ballast stabilized with geogrid under cyclic load [J]. *American Society of Civil Engineers*, 2013, 139(8):1275.
- [3] 严颖,狄少丞,苏勇,等. 风沙影响下铁路道砟变形模量的离散元数值分析[J]. *计算力学学报*, 2012, 29(3):439. YAN Ying, DI Shaocheng, SU Yong, *et al.* Discrete element analysis of elastic modulus of railway ballasts in wind with different sand contents[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2012, 29(3):439.
- [4] 高亮,罗奇,徐旻,等. 基于离散元法的铁路道床力学特性[J]. *同济大学学报:自然科学版*, 2014, 42(7):1064. GAO Liang, LUO Qi, XU Yang, *et al.* Railway ballast bed mechanical property based on discrete element method [J]. *Journal of Tongji University: Natural Science*, 2014, 42(7):1064.
- [5] Lim W L, McDowell G R. Discrete element modeling of railway ballast[J]. *Granular Matter*, 2005, 7(1):19.
- [6] Hossain Z, Indraratna B, Darve F, *et al.* DEM analysis of angular ballast breakage under cyclic loading[J]. *Geomechanics & Geoengineering*, 2007, 2(3):175.
- [7] 赵春发,张徐,翟婉明. 高速铁路碎石道砟振动的离散元模拟[J]. *计算力学学报*, 2015(5):674. ZHAO Chunfa, ZHANG Xu, ZHAI Wanming. A discrete element simulation of high speed railway ballast vibration[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2015(5):674.
- [8] 边学成,李伟,李公羽,等. 基于颗粒真实几何形状的铁路道砟剪切过程三维离散元分析[J]. *工程力学*, 2015, 32(5):64. Bian Xuecheng, Li Wei, Li Gongyu, *et al.* Three-Dimensional Discrete element analysis of railway ballast's shear process based on particles' real Geometry[J]. *Engineering Mechanics*, 2015, 32(5):64.
- [9] 孙珊珊,严颖,赵春发,等. 往复荷载下铁路道砟沉降特性的扩展多面体离散元分析[J]. *铁道学报*, 2015(11):89. SUN Shanshan, YAN Ying, ZHAO Chunfa, *et al.* Dilated polyhedra discrete element analysis of settlement characteristics of railway ballast under cyclic loading [J]. *Journal of the China Railway Society*, 2015(11):89.
- [10] Mishra D, Qian Y, Huang H, *et al.* An integrated approach to dynamic analysis of railroad track transitions behavior [J]. *Transportation Geotechnics*, 2014, 1(4):188.
- [11] Eliáš J. Simulation of railway ballast using crushable polyhedral particles[J]. *Powder Technology*, 2014, 264:458.
- [12] Nassauer B, Liedke T, Kuna M. Polyhedral particles for the discrete element method[J]. *Granular Matter*, 2013, 15(1):85.