文章编号:0253-374X(2017)06-0936-05 DOI:10.11908/j.issn.0253-374x.2017.06.023

基于弱 Galerkin 有限元离散的瀑布型多重网格算法

孙 石[1],黄自萍[1,2],王 琤[1]
(1. 同济大学 数学科学学院,上海 200092;2. 同济大学 中德学院,上海 200092)

摘要:针对二阶椭圆型偏微分方程,给出了基于弱 Galerkin 有限元离散的瀑布型多重网格算法的能量误差估计和计算复杂度分析. 最后数值实验验证了理论分析的正确性.

关键词:弱 Galerkin 有限元;瀑布型多重网格方法;二阶椭圆型偏微分方程
中图分类号:O241.82 **文献标志码**:A

Cascadic Multigrid Algorithm Based on Weak Galerkin Finite Element Discretization

SUN Shi[1], *HUANG Ziping*[1,2], *WANG Cheng*[1]
(1. School of Mathematical Sciences, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. Chinese-German School for Postgraduate Studies, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: A cascadic multigrid algorithm based on the weak Galerkin finite element discretization was analyzed for the second order elliptic partial differential equations. The estimation of the error in energy norm and the analysis of computational complexity were given. Finally, numerical experiments were conducted to verify the theoretical results.

Key words: weak Galerkin finite element; cascadic multigrid method; second order elliptic partial differential equations

弱 Galerkin 有限元方法[1-3]是一种新型的有限元方法. 由于引入了弱梯度的概念,该离散方法具有很高的灵活性[1-2]. 目前,弱 Galerkin 有限元方法已被成功地用于求解二阶和四阶椭圆问题及 Stokes 问题等[2,4-5],但其离散所得代数方程组的数值解法研究还比较有限.

另一方面,瀑布型多重网格方法是一类易于实施的单向多重网格方法. 对于二阶椭圆问题和 Stokes 问题,文献[6-10]构造了基于有限元或有限体积法离散的瀑布型多重网格方法,并证明当采用适合的光滑迭代子时,方法在计算精度和计算复杂度方面均是最优的.

本文首先对于弱 Galerkin 有限元空间,提出并分析了一类新的网格转移算子,然后基于文献[8]的瀑布型多重网格的理论框架,证明了当采用共轭梯度法作为迭代算子时,基于弱 Galerkin 有限元离散的瀑布型多重网格算法具有最优的计算精度和计算复杂度.

1 模型问题和弱 Galerkin 有限元方法

设 Ω 是 $\mathbf{R}^2$ 中有界凸多边形区域,其边界为$\partial\Omega$. 考虑如下椭圆问题:

$$\begin{cases}-\nabla\cdot(a(x)\nabla u)=f, & \text{在 }\Omega\text{ 内}\\ u=0, & \text{在 }\partial\Omega\text{ 上}\end{cases}\tag{1}$$

其中,$f\in L^2(\Omega)$,$a(x)\in W^{1,\infty}(\Omega)$且存在正数 α 和 β,满足 $\alpha\leqslant a(x)\leqslant\beta$. 这里及后文采用与文献[11-12]相同的 Lebesgue 空间记号、Sobolev 空间记号和相关范数记号. 对于 L^2 空间,本文省略内积和范数的下标. 用 c 或 C 表示与网格参数无关的正常数,且在不同地方可取不同值.

设 T_h 是正则且拟一致的有限元网格剖分,并用下标 h 表示其网格尺度. j、j_1 和 r 为非负整数. 对于任意 $K\in T_h$, ∂K 和$\mathring{K}$分别表示其边界和内部. $P_j(\mathring{K})$表示$\mathring{K}$上次数小于等于 j 的多项式全体,$P_{j_1}(\partial K)$表示∂K 上次数小于等于j_1 的多项式. 令

$$W(K):=\{\{v_0,v_b\}:v_0\in L^2(K),v_b\in H^{\frac{1}{2}}(\partial K)\}$$

$$H(\mathrm{div},\Omega):=\{\boldsymbol{q}:\boldsymbol{q}\in(L^2(\Omega))^2,\nabla\cdot\boldsymbol{q}\in L^2(\Omega)\}$$

对任意 $v\in W(K)$,其弱梯度$\nabla_w v$ 定义为

$$(\nabla_w v,\boldsymbol{q})_K=-(v_0,\nabla\cdot\boldsymbol{q})_K+\langle v_b,\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}\rangle_{\partial K}$$

对任意 $\boldsymbol{q}\in H(\mathrm{div},\Omega)$成立. 这里,$\boldsymbol{n}$ 是∂K 的单位外法线向量,$(\cdot,\cdot)_D$ 表示区域 $D\subset\Omega$ 上的 L^2 内积,

收稿日期:2016-08-26
基金项目:国家自然科学基金(11101311);中德教席基金(0900101021)
第一作者:孙 石(1989—),女,博士生,主要研究方向为偏微分方程数值解. E-mail:1110463@tongji.edu.cn
通讯作者:黄自萍(1961—),男,教授,博士生导师,理学博士,主要研究方向为偏微分方程数值解. E-mail:huangziping@tongji.edu.cn

$\langle\cdot,\cdot\rangle_{\partial D}$表示边界$\partial D$上的$L^2$内积. 进一步，定义其离散弱梯度$\nabla_{d,r,K}v$为

$$(\nabla_{d,r,K}v,\boldsymbol{q})_K=-(v_0,\nabla\cdot\boldsymbol{q})_K+\langle v_b,\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}\rangle_{\partial K}$$

对任意$\boldsymbol{q}\in V(K,r)$成立. 这里$V(K,r)$表示r次多项式向量空间的子空间，简单起见，后文将省略离散弱梯度的下标r、K.

定义空间

$$V_h:=\{\{v_0,v_b\}:v_0|_K\in P_j(\mathring{K}),\ v_b|_{\partial K}\in P_{j_1}(\partial K),\forall K\in T_h\}$$

$$V_{h,0}:=\{v:v\in V_h,v_b=0\text{ 在 }\partial\Omega\text{ 上}\}$$

则弱 Galerkin 有限元方法可写为：找$u_h=\{u_0,u_b\}\in V_{h,0}$，使得

$$a_h(u_h,v)=(f,v_0),\ \forall v=\{v_0,v_b\}\in V_{h,0}\quad(2)$$

其中$a_h(w,v)=(a(x)\nabla_d w,\nabla_d v)_\Omega$，$\forall v,w\in V_h$.

对任意$v\in V_h$，引入离散范数[3]

$$\|v\|_{0,h,K}^2=\|v_0\|_{0,K}^2+h\|v_0-v_b\|_{\partial K}^2,$$

$$\|v\|_{0,h}=\Big(\sum_{K\in T_h}\|v\|_{0,h,K}^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

令$Q_hv=\{Q_0v,Q_bv\}$表示从$H_0^1(\Omega)$到$V_{h,0}$的L^2投影，其中$Q_0v|_K$是到$P_j(\mathring{K})$的L^2投影，$Q_bv|_{\partial K}$是到$P_{j_1}(\partial K)$的L^2投影.

令$j_1=j$，$r=j+1$，$V(K,r)$为 Raviart-Thomas 元空间[13-14]（简称 RT 元），即

$$V(K,r)=[P_j(K)]^2+\hat{P}_j(K)\boldsymbol{x}$$

其中$\hat{P}_j(K)$是关于向量$\boldsymbol{x}$的齐次j次多项式.

根据文献[1]中定理 8.3 及 8.4，有如下估计：

定理 1　设u_h是弱 Galerkin 有限元方法(2)的解，u是问题(1)的弱解，且满足$u\in H^{m+1}(\Omega)$，则成立

$$h\|\nabla_d u_h-\nabla u\|+\|u_h-u\|_{0,h}\leqslant Ch^{m+1}\|f\|$$

2　瀑布型多重网格算法

$T_l=T_{h_l}(l\geqslant 0)$是一系列嵌套的三角形网格剖分，且网格参数$h_l$满足$h_l=2^{-l}h_0$. $V_l=V_{h_l,0}$是相应的弱 Galerkin 有限元空间，$V_l^{(\mathrm{FE})}$是相应的连续j次拉格朗日有限元空间，记$Q_l=Q_{h_l}$，$\|\cdot\|_{0,h_l}=\|\cdot\|_{0,l}$.

第l层上的弱 Galerkin 有限元方法为：找$u_l=\{u_0,u_b\}\in V_l$，使得

$$a_l(u_l,v_l)=(f,v_0),\ \forall v_l=\{v_0,v_b\}\in V_l\quad(3)$$

定义A_l算子

$$((A_lu_l,v_l))=a_l(u_l,v_l),\ \forall u_l,v_l\in V_l$$

和能量范数

$$|||v|||_l=((A_lv,v))^{1/2},\ \forall v\in V_l$$

其中，对任意$v,w\in V_l$，$((v,w))=\sum_{K\in T_h}((v_0,w_0)_K+h\langle v_0-v_b,w_0-w_b\rangle_{\partial K})$

基于弱 Galerkin 有限元的瀑布型多重网格算法的描述如图 1 所示.

(1)在最粗网格($l=0$)上，精确求解弱 Galerkin 有限元问题(3)，并令$u_0^{(0)}=u_0^*=u_0$.
(2)在较细网格($l=1,\cdots,L$)上，依次以如下三个步骤求解：
(a)取上一层网格数值解的插值作为迭代初始值，即取$u_l^{(0)}=I_lu_{l-1}^*$.
(b)利用某迭代格式迭代m_l次进行求解，即$u_l^{(m_l)}=C_l^{m_l}u_l^{(0)}$.
(c)令$u_l^*=u_l^{(m_l)}$.

图 1　算法描述

Fig.1　Algorithm description

图 1 中，I_l表示网格转移算子，C_l表示迭代算子，m_l是第l层上的迭代次数.

对任意$v=\{v_0,v_b\}\in V_{l-1}$，网格转移算子$I_l:V_{l-1}\to V_l$定义如下：

(1)对单元内部，即$x\in\mathring{K}_l$. 对任意$K_l\in T_l$，存在$K_{l-1}\in T_{l-1}$，使得$K_l\subset K_{l-1}$，则

$$(I_lv)_0(x)=v_0(x)$$

(2)对单元边界，若$x\in e_l$，e_l落在$K_{l-1}\in T_{l-1}$的内部，则

$$(I_lv)_b(x)=v_0(x)$$

(3)对单元边界，若$x\in e_l$，e_l是边界∂K_{l-1}的一部分的内部，则

$$(I_lv)_b(x)=v_b(x)$$

对于上述定义的网格转移算子I_l，有

引理 1　对任意$v\in V_{l-1}$，成立

$$\|I_lv\|_{0,l}\leqslant\|v\|_{0,l-1},\ \|\nabla_d(I_lv)\|\leqslant C\,|||v|||_{l-1}$$

证明：由网格转移算子I_l的定义易知第一个不等式成立.

任意$K\in T_{l-1}$都由T_l上的若干个单元组成，不妨设$K=K_1\cup\cdots\cup K_m$，其中$K_i\in T_l$. 根据文献[3]中式(3.9)，对任意$v\in V_{l-1}$，有

$$\|\nabla_d(I_lv)\cdot\boldsymbol{n}\|_{\partial K_i}\leqslant Ch_l^{-\frac{1}{2}}\|\nabla_d(I_lv)\|_{K_i}\quad(4)$$

由文献[3]中的引理 3.2 的证明，可知

$$\|\nabla v_0\|_K\leqslant\|\nabla_d v\|_K\quad(5)$$

$$\|v_0-v_b\|_e\leqslant h^{\frac{1}{2}}\|\nabla_d v\|_K\quad(6)$$

根据离散弱梯度的定义及以上三个式子，可知

$$(\nabla_d(I_lv),\nabla_d(I_lv))_{K_i}=(\nabla(I_lv)_0,\nabla_d(I_lv))_{K_i}-\langle(I_lv)_0-(I_lv)_b,\nabla_d(I_lv)\cdot\boldsymbol{n}\rangle_{\partial K_i}\leqslant\|\nabla(I_lv)_0\|_{K_i}\|\nabla_d(I_lv)\|_{K_i}+$$

$$\begin{aligned}&\|(I_lv)_0-(I_lv)_b\|_{\partial K_i}\|\nabla_d(I_lv)\cdot\boldsymbol{n}\|_{\partial K_i}\leqslant\\&\|\nabla v_0\|_K\|\nabla_d(I_lv)\|_{K_i}+\\&\|v_0-v_b\|_{\partial K}\|\nabla_d(I_lv)\boldsymbol{n}\|_{\partial K_i}\leqslant\\&\|\nabla v_0\|_K\|\nabla_d(I_lv)\|_{K_i}+\\&h_{l-1}^{\frac{1}{2}}\|\nabla_dv\|_Kh_l^{-\frac{1}{2}}\|\nabla_d(I_lv)\|_{K_i}\leqslant\\&C\|\nabla_dv\|_K\|\nabla_d(I_lv)\|_{K_i}\end{aligned}$$

即第二个不等式成立.

引理2 设 u_l 为第 l 层网格上的弱 Galerkin 有限元问题(3)的解,则

$$\|u_l-I_lu_{l-1}\|_{0,l}\leqslant Ch_l^2\|f\|$$

证明:假设 $u_l^{(\mathrm{FE})}$ 和 $u_{l-1}^{(\mathrm{FE})}$ 分别是 T_l 和 T_{l-1} 剖分上的有限元解. 由三角不等式和引理1可得

$$\begin{aligned}&\|u_l-I_lu_{l-1}\|_{0,l}\leqslant\|u_l-u\|_{0,l}+\|u-u_{l-1}^{(\mathrm{FE})}\|_{0,l}+\\&\|I_lu_{l-1}^{(\mathrm{FE})}-I_lu_{l-1}\|_{0,l}\leqslant\|u_l-u\|_{0,l}+\\&\|u-u_{l-1}^{(\mathrm{FE})}\|+\|u_{l-1}^{(\mathrm{FE})}-u_{l-1}\|_{0,l-1}\leqslant\\&C_1h_l^2\|f\|+C_2h_l^2\|u\|_2+C_3h_{l-1}^2\|u\|_2\leqslant\\&Ch_l^2\|f\|\end{aligned}$$

引理得证.

设 $C_l:V_l\to V_l$ 是第 l 层上 Richardson、Jacobi、Gauss-Seidel 或 Conjugate Gradient (CG)迭代方法对应的迭代算子. 利用类似文献[4,6,14]中的方法,可以证明存在线性算子 $R_l:V_l\to V_l$,使得

$$u_l-C_l^{m_l}u_l^{(0)}=R_l^{m_l}(u_l-u_l^{(0)})$$

且有

$$|||\,R_l^{m_l}v\,|||_l\leqslant C\frac{h_l^{-1}}{m_l^{\gamma}}\|v\|_{0,l},\ \forall v\in V_l$$

$$|||\,R_l^{m_l}v\,|||_l\leqslant|||\,v\,|||_l,\ \forall v\in V_l$$

对于 Richardson、Jacobi、Gauss-Seidel 迭代方法,$\gamma=1/2$. 对于CG迭代方法,$\gamma=1$.

定义投影算子 $P_{l-1}:V_{l-1}\to V_{l-1}^{(\mathrm{FE})}$ 为

$$a_l(P_{l-1}u,v)=a_l(I_lu,v),\ \forall v\in V_{l-1}^{(\mathrm{FE})}$$

由投影算子的性质,易知

$$a_l(P_{l-1}u,v)=a_{l-1}(P_{l-1}u,v),\ \forall v\in V_{l-1}^{(\mathrm{FE})}\quad(7)$$

$$a_l(I_lu,v)=a_{l-1}(u,v),\ \forall v\in V_{l-1}^{(\mathrm{FE})}\quad(8)$$

引理3 对于上述定义的投影算子 P_{l-1},成立

$$|||\,P_{l-1}v\,|||_l\leqslant|||\,v\,|||_{l-1},\ \forall v\in V_{l-1}\quad(9)$$

$$\|I_lv-P_{l-1}v\|_{0,l}\leqslant Ch_l\,|||\,v\,|||_{l-1},\ \forall v\in V_{l-1}\quad(10)$$

证明:由投影算子 P_l 的定义及式(7)和(8)可知,对任意 $v\in V_{l-1}$,有

$$a_{l-1}(P_{l-1}v,P_{l-1}v)=a_{l-1}(v,P_{l-1}v)$$

于是

$$\begin{aligned}&a_{l-1}(v,v)-a_l(P_{l-1}v,P_{l-1}v)=\\&a_{l-1}(v-P_{l-1}v,v-P_{l-1}v)\geqslant0\end{aligned}$$

这表明 $|v|_{l-1}\geqslant|P_{l-1}v|_l$,即式(9)得证.

下面证明式(10). 对任意给定函数 $v\in V_{l-1}$,引入如下辅助问题:

$$\begin{cases}-\nabla\cdot(a(x)\nabla\xi)=(I_lv-P_{l-1}v)_0, & \text{在}\ \Omega\ \text{内}\\ \xi=0, & \text{在}\ \partial\Omega\ \text{上}\end{cases}$$

由于 Ω 是有界凸多边形区域,所以该问题存在唯一解 $\xi\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$,且满足正则性估计

$$\|\xi\|_2\leqslant\|(I_lv-P_{l-1}v)_0\|\quad(11)$$

对任意 $\boldsymbol{q}\in H(\mathrm{div},\Omega)$,任意 $K\in T_l$,令 $\Pi_l\boldsymbol{q}\in(P_r(K))^2$ 满足

$$(\nabla\cdot\boldsymbol{q},v_0)_K=(\nabla\cdot\Pi_l\boldsymbol{q},v_0)_K,\ \forall v_0\in P_j(\mathring{K})$$

由文献[1]中引理7.2和7.3可知

$$\begin{aligned}&\|(I_lv-P_{l-1}v)_0\|^2=\\&-(\nabla\cdot(a(x)\nabla\xi),(I_lv-P_{l-1}v)_0)=\\&\quad-(\Pi_l(a(x)\nabla\xi),\nabla_d(I_lv-P_{l-1}v))\end{aligned}$$

$$\|\Pi_l(a(x)\nabla\xi)-a(x)\nabla_d(Q_l\xi)\|\leqslant Ch\|\xi\|_2$$

$$\|\nabla\xi-\nabla_d(Q_l\xi)\|\leqslant Ch\|\xi\|_2$$

于是

$$\begin{aligned}&\|(I_lv-P_{l-1}v)_0\|^2=\\&\quad(\Pi_l(a\nabla\xi)-a\nabla_d(Q_l\xi),\nabla_w(I_lv-P_{l-1}v))+\\&\quad(a\nabla_d(Q_l\xi),\nabla_d(I_lv-P_{l-1}v))\leqslant\\&\quad\|\Pi_l(a\nabla\xi)-a\nabla_d(Q_l\xi)\|\|\nabla_d(I_lv-P_{l-1}v)\|+\\&\quad a_l(Q_l\xi,I_lv-P_{l-1}v)\leqslant\\&\quad Ch_l\|\xi\|_2\|\nabla_d(I_lv-P_{l-1}v)\|+a_l(Q_l\xi,I_lv-P_{l-1}v)\end{aligned}$$

对任意 $\xi_{l-1}^{(\mathrm{FE})}\in V_{l-1}^{(\mathrm{FE})}$,由

$$a_l(I_lv-P_{l-1}v,\xi_{l-1}^{(\mathrm{FE})})=0$$

可得

$$\begin{aligned}&a_l(Q_l\xi,I_lv-P_{l-1}v)=a_l(Q_l\xi-\xi_{l-1}^{(\mathrm{FE})},I_lv-P_{l-1}v)\leqslant\\&\quad C\|\nabla_d(Q_l\xi)-\nabla\xi_{l-1}^{(\mathrm{FE})}\|\|\nabla_d(I_lv-P_{l-1}v)\|\leqslant\\&\quad Ch_l\|\xi\|_2\|\nabla_d(I_lv-P_{l-1}v)\|\end{aligned}$$

再由式(11),得

$$\|(I_lv-P_{l-1}v)_0\|\leqslant\|\nabla_d(I_lv-P_{l-1}v)\|$$

由文献[3]中的引理3.2可知

$$\|v_0-v_b\|_e\leqslant h^{\frac{1}{2}}\|\nabla_dv\|_K$$

因此,可得

$$\begin{aligned}&\|I_lv-P_{l-1}v\|_{0,l}^2=\|(I_lv-P_{l-1}v)_0\|^2+\\&\quad\sum_{K\in T_l}h_l\|(I_lv-P_{l-1}v)_0-(I_lv-P_{l-1}v)_b\|_{\partial K}^2\leqslant\\&\quad\|(I_lv-P_{l-1}v)_0\|^2+h_l^2\|\nabla_d(I_lv-P_{l-1}v)\|^2\leqslant\\&\quad Ch_l^2\|\nabla_d(I_lv-P_{l-1}v)\|^2\end{aligned}$$

即

$$\|I_lv-P_{l-1}v\|_{0,l}\leqslant Ch_l(\|\nabla_d(I_lv)\|+\|\nabla_d(P_{l-1}v)\|)\quad(12)$$

综合式(12)、式(9)和引理1,即可得到式(10).

设 $m_l(0\leqslant l\leqslant L)$ 是满足 $m_l\geqslant\beta^{L-l}m_L$ 的最小整数，其中 $\beta>1$，m_L 是第 L 层上的迭代次数．根据文献[7]的理论框架，可得到如下结论：

定理 2　对于 CG 迭代方法，若 $2\leqslant\beta\leqslant 4$，则瀑布型多重网格方法最优，即

$$|||\, u_L - u_L^* \,|||_L \approx |||\, u - u_L \,|||_L$$

且计算复杂度为 $O(n_L)$．

对于 Richardson、Jacobi、Gauss-Seidel 迭代方法，若 $\beta=4$，第 l 层上的迭代次数满足 $m_l\geqslant m_* l^2$（给定 $m_*\geqslant 1$），则有

$$|||\, u_L - u_L^* \,|||_L \leqslant C\frac{h_l}{m_*^{\frac{1}{2}}}\|f\|$$

且计算复杂度为

$$\sum_{k=1}^{L} m_k n_k \leqslant C m_L n_L (1+\log n_L)^3$$

这里 n_L 表示 L 层未知量个数．

3　数值实验

本节考虑模型问题(1)，选取如下算例：

算例 1　$a(x_1,x_2)=e^{x_1+x_2}$，选取右端函数使得真解 $u=\sin(\pi x_1)\sin(\pi x_2)$．

算例 2　$a(x_1,x_2)=\dfrac{1}{1+x_1^2}$，选取右端函数使得真解 $u=x_1(1-x_1)x_2(1-x_2)e^{x_1+x_2}$．

本文的实验环境为 Intel(R) Core(TM) i5-2500 CPU 3.30GH，12.0 GB 内存，64 位 Windows 7 操作系统，实现算法的软件为 Matlab R2015b．采用 CG 迭代算子，最细网格迭代次数 $m_L=35$，参数 $\beta=3$．

表 1 和 2 分别是算例 1 和 2 的计算结果．采用 CG 迭代，得到基于弱 Galerkin 有限元离散的瀑布型多重网格算法的计算结果，其中 $L=1$ 表示仅用 CG 迭代求解的结果．结果表明：①由瀑布型多重网格得到的数值解，其能量范数误差与弱 Galerkin 有限元方法是同阶的，均为 $O(h)$；②该多重网格方法在计算复杂度方面是最优的，即求解时间与最细层网格上未知量个数 n_L 成正比．这与前面的理论分析一致．

表 1　算例 1 计算结果

Tab.1　Numerical results of example 1

h	n_L	L	$\lvert u_L^*-u\rvert_L$	求解时间/s
1/64	49 408	1	5.4514×10^{-2}	17.48
		2	5.4660×10^{-2}	0.62
		3	5.4666×10^{-2}	0.55
1/128	197 120	1	2.7260×10^{-2}	126.93
		2	2.7343×10^{-2}	3.52
		3	2.7349×10^{-2}	2.44
		4	2.7349×10^{-2}	2.41
1/256	787 456	1	1.3630×10^{-2}	1 056.28
		2	1.3674×10^{-2}	20.78
		3	1.3675×10^{-2}	11.64
		4	1.3676×10^{-2}	10.67
		5	1.3676×10^{-2}	10.79
1/512	3 147 776	1	6.8153×10^{-3}	8 517.64
		2	6.8437×10^{-3}	125.19
		3	6.8381×10^{-3}	54.68
		4	6.8393×10^{-3}	46.02
		5	6.8393×10^{-3}	45.08
		6	6.8393×10^{-3}	45.62

表 2　算例 2 计算结果

Tab.2　Numerical results of example 2

h	n_L	L	$\lvert u_L^*-u\rvert_L$	求解时间/s
1/64	49 408	1	2.3556×10^{-3}	8.74
		2	2.3539×10^{-3}	0.53
		3	2.3539×10^{-3}	0.50
1/128	197 120	1	1.1781×10^{-3}	72.27
		2	1.1775×10^{-3}	2.86
		3	1.1775×10^{-3}	2.28
		4	1.1775×10^{-3}	2.29
1/256	787 456	1	5.8909×10^{-4}	571.91
		2	5.8891×10^{-4}	15.18
		3	5.8891×10^{-4}	10.33
		4	5.8891×10^{-4}	10.12
		5	5.8891×10^{-4}	10.25
1/512	3 147 776	1	2.9455×10^{-4}	4 766.82
		2	2.9452×10^{-4}	89.82
		3	2.9450×10^{-4}	49.25
		4	2.9450×10^{-4}	45.70
		5	2.9450×10^{-4}	46.65
		6	2.9450×10^{-4}	45.94

4　结论与展望

本文应用瀑布型多重网格方法求解弱 Galerkin 有限元离散二阶椭圆型偏微分方程所得到的代数方程组，证明了当采用共轭梯度法作为光滑迭代子时，本文方法所得数值解的能量误差与弱 Galerkin 有限元解同阶，且该方法具有最优的计算复杂度．数值算例验证了理论分析结果．本文所提出和分析的网格转移算子，可进一步用于构造其他类型偏微分方程的弱 Galerkin 有限元瀑布型多重网格算法．

参考文献：

[1]　WANG J, YE X. A weak Galerkin finite element method for second-order elliptic problems [J]. Journal of Computational &

Applied Mathematics, 2011, 241(1): 103.

[2] MU L, WANG J, WANG Y, *et al*. A computational study of the weak Galerkin method for second-order elliptic equations [J]. Numerical Algorithms, 2013, 63(4):753.

[3] MU L, WANG J, WANG Y, *et al*. A weak Galerkin mixed finite element method for biharmonic equations[C]//Numerical Solution of Partial Differential Equations: Theory, Algorithms, and Their Applications. New York: Springer, 2013: 247-277.

[4] MU L, WANG J, YE X. Weak Galerkin finite element methods for the biharmonic equation on polytopal meshes[J]. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 2014, 30 (3): 1003.

[5] WANG J, YE X. A weak Galerkin finite element method for the Stokes equations[J]. Advances in Computational Mathematics, 2016, 42(1): 155.

[6] BORNEMANN F A, DEUFLHARD P. The cascadic multigrid method for elliptic problems [J]. Numerische Mathematik, 1996, 75(2):135.

[7] WANG C, HUANG Z, LI L. Cascadic multigrid method for P 1-nonconforming quadrilateral element[J]. Journal of Numerical Mathematics, 2008, 16(3): 237.

[8] SHI Z C, XU X. Cascadic multigrid method for elliptic problems[J]. East West Journal of Numerical Mathematics, 1999, 7: 199.

[9] BRAESS D, Dahmen W. A cascadic multigrid algorithm for the Stokes equations [J]. Numerische Mathematik, 1999, 82 (2): 179.

[10] YU H, ZENG J. A cascadic multigrid method for a kind of semilinear elliptic problem[J]. Numerical Algorithms, 2011, 58(2): 143.

[11] BRENNER S, SCOTT R. The mathematical theory of finite element methods[M]. New York : Springer Science & Business Media, 2007.

[12] ADAMS R A, FOURNIER J J F. Singapore: Sobolev spaces [M]. Singapore: Academic Press, 2003.

[13] RAVIART P A, THOMAS J M. A mixed finite element method for 2-nd order elliptic problems[C]//Mathematical Aspects of Finite Element Methods. New York: Springer Berlin Heidelberg, 1977: 292-315.

[14] BREZZI F, FORTIN M. Mixed and hybrid finite element methods [M]. New York: Springer Science & Business Media, 2012.

(上接第929页)

[8] 闫威，马宗民，严丽，等. 基于XML内容和结构的模糊查询[J]. 东北大学学报(自然科学版)，2011，32(7)：931.
YAN Wei, MA Zongmin, YAN Li, *et al*. Fuzzy query based on XML content and structure [J]. Journal of Northeastern University(Natural Science), 2011, 32(7):931.

[9] 杜庆峰，许家伟. DWG地图到改进规则SVG地图的转换方法[J]. 同济大学学报(自然科学版)，2014，42(9)：1426.
DU Qingfeng, XU Jiawei. A conversion method from DWG format map to improved-rules SVG format map[J]. Journal of Tongji University(Natural Science), 2014, 42(9):1426.

[10] 张坤. 基础地理信息要素分类与代码[M]. 北京：中国标准出版社，2006.
ZHANG Kun. Basic geographic information element classification and code [M]. Beijing: China Standard Press, 2006.

[11] ZHOU G M. The research of knowledge-based Chinese segmentation method [J]. Applied Mechanics and Materials, 2014, 651:2545.

[12] 龙树全，赵正文，唐华. 中文分词算法概述[J]. 电脑知识与技术：学术交流，2009，5(4)：2605.
LONG Shuquan, ZHAO Zhengwen, TANG Hua. Overview on Chinese segmentation algorithm[J]. Computer Knowledge and Technology: Academic Exchanges, 2009, 5(4):2605.

[13] 运正佳，李轶男，杨晓春. 支持带有通配符的字符串匹配算法[J]. 计算机科学与探索，2010 (11)：984.
YUN Zhengjia, LI Yinan, YANG Xiaochun. An algorithm for matching strings with wildcards [J]. Computer Science and Exploration, 2010(11): 984.