

# 理论模型计算爆炸荷载作用下简支梁动力响应

谢 雷<sup>1,2</sup>, 匡志平<sup>1</sup>

(1. 同济大学 土木工程学院, 上海 200092; 2. 延边大学 工学院, 吉林 延吉 133002)

**摘要:** 根据爆炸动力与振动力学理论采用 Euler 梁模型与改进的 Timoshenko 梁模型分别分析了简支梁的动力响应。爆炸荷载被简化为三角形荷载, 爆压计算公式采用 J. Henrych 公式。结果表明简支梁的动力反应包含 2 个阶段, 分别为受迫振动阶段(弹性和塑性)和自由振动阶段。建立挠度应力方程用来判断梁的屈服。通过计算分析可知, 与 Euler 梁结果相比, 有限元计算结果相对更接近于 Timoshenko 梁模型计算结果。这是由于修正 Timoshenko 梁理论中考虑了剪切惯性效应的缘故。考虑实际工程中梁支承端部的约束形式对梁受荷载作用的影响, 将端部约束简化为含有弹簧与阻尼共同作用的模型, 研究弹性支撑系数、弯矩抵抗系数及阻尼系数参数变化对控制位移的影响。

**关键词:** 爆炸动力学; 动力响应; Euler 梁模型; Timoshenko 梁模型; 有限元模型(FEM)

**中图分类号:** O389

**文献标志码:** A

## Simply Supported Beam Explosion Response Based on Theory Models Title

XIE Lei<sup>1,2</sup>, KUANG Zhiping<sup>1</sup>

(1. College of Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. Engineering College, Yanbian University, Yanji 133002, China)

**Abstract:** According to the explosive dynamics and vibration theory, utilized theory model of Euler beam and improved Timoshenko beam to analysis dynamic response of simply beam. Blast load was simplified to triangle load. The explosion overpressure was determined by J. Henrych. The results show that dynamic response is divided into two phases, i. e. comprising forced vibration stage (elastic and plastic) with load and free vibration stages with no-load. Furthermore, beam yield judgment used equation of the relation between deflection and stress. The numerical calculations of the finite element model relatively good fitted to the theoretical values of Timoshenko beam model compared to the Euler beam model. Considering shear inertial effect in

Timoshenko beam theory lead to this phenomenon. For the requirement of engineering practice, constraint form of propping end effect on beam response, constraint form is simplified to model which contains spring and damping. Through coefficients variation of elastic propping, resistance moment and damping to research variation of critical displacement.

**Key words:** explosion dynamics; dynamic response; Euler beam model; Timoshenko beam model; finite element model (FEM)

近年来伴随着极端恐怖势力和地区恐怖主义的增长, 爆炸事件层出不穷, 严重威胁了人民生命和财产安全。2016 年 2 月, 土耳其首都安卡拉汽车炸弹爆炸导致 28 人死亡, 61 人受伤。2016 年 6 月伊斯坦布尔的 Ataturk 国际机场发生爆炸事件造成 36 人死亡, 140 多人受伤。很多事例表明工程结构的抗爆研究成为关键的焦点, 亟待解决<sup>[1-2]</sup>。

数值模拟、理论计算和试验是爆炸荷载作用下研究受力构件的重要方法。由于爆炸试验花费昂贵, 在试验研究之前应该进行充分的数值模拟。为了防止受力构件过度破坏或受载不足, 应该避免盲目试验。为了更好地理解试验机理, 应当考虑简化试验构件的受力状态。通过对荷载与模型的简化<sup>[3]</sup>并结合相关参数的确定, 能够合理分析和预测构件的受力状态, 深刻理解工程中问题形成的机制。

简支梁作为重要的受力构件广泛应用于建筑工程与桥梁工程<sup>[4]</sup>, 所以简支梁的抗爆性能成为结构抗爆领域的热点问题, 这在许多研究中都有所体现<sup>[5-7]</sup>。由于试验费用昂贵和试验环境苛刻, 故很少进行原型试验。因此, 大多数结构抗爆研究都集中在理论研究方面, 这对抗爆研究提出了巨大的挑战。

关于梁的理论计算方法一般集中在 Bernoulli-

收稿日期: 2016-10-13

第一作者: 谢 雷(1981—), 男, 讲师, 博士生, 主要研究方向为结构抗爆。E-mail: xielei-001@163.com

通讯作者: 匡志平(1965—), 男, 教授, 博士生导师, 工学博士, 主要研究方向为结构抗爆。E-mail: zhipingkuang@163.com

Euler 方法和 Timoshenko 方法. 针对 Bernoulli-Euler 梁方法已经有了大量的研究: 一些学者<sup>[8]</sup>通过空间和时间的离散改进了 Euler 方法, 相比于传统的正交差分法, 改进的方法更加合理且有效; 另外一些学者<sup>[9-10]</sup>考虑到构件的尺寸效应和与此效应相关的频率影响. 与之对应的是在理论领域, Timoshenko 梁的研究类似于 Euler 梁. 如 Hilton<sup>[11]</sup>通过考虑弹性剪切系数和黏弹性剪切系数计算转换的 Timoshenko 梁. 但采用这 2 种梁模型计算不同荷载类型作用下动力行为的研究却有所不同: Clough 等<sup>[12]</sup>在一定条件下研究了冲击荷载作用下 Euler 梁的动力行为, 然而关于 Timoshenko 梁在该种类型荷载作用下却鲜见于报道. 梁在爆炸荷载作用下的反应属于动力问题, 本文研究应用 Timoshenko 梁理论模型的简支梁受到爆炸荷载作用时的动力反应, 并简化梁端部约束构建理论模型, 初步探讨变约束条件下各参数对位移变化的影响.

## 1 理论分析爆炸荷载作用下简支梁的动力反应

### 1.1 爆炸荷载的选择

Baker<sup>[13]</sup>研究表明, 爆炸冲击波形成后, 爆炸压力曲线呈现出正压和负压两部分. 爆炸的正压部分在空气中形成冲击波. 负压形成的原因是爆炸燃尽了氧气, 导致爆炸区域压力小于外部压力. 但是爆炸产生的能量大多数集中于正压阶段, 所以对于结构上作用的荷载主要考虑正压作用而忽略负压作用. 由于爆炸荷载有很强的随机性且近似呈现指数分布, 因此采用三角荷载代替真实的爆炸. 这样的合理之处在于, 三角荷载能够反映爆炸荷载作用下的峰值压力, 且函数简单易于被计算. TNT (trinitrotoluene) 爆轰波峰值超压采用 Henrych 公式, 见式(1)至式(4):

$$P(t) = \begin{cases} \Delta p_1 (1 - t/t_1), & 0 < t < t_1 \\ 0, & t > t_1 \end{cases} \quad (1)$$

当  $0.05 \leq \bar{R} \leq 0.30$  时, 有

$$\Delta p_m = 1.379/\bar{R} + 0.543/\bar{R}^2 - 0.035/\bar{R}^3 + 0.0006/\bar{R}^4 \quad (2)$$

当  $0.30 \leq \bar{R} \leq 1.00$  时, 有

$$\Delta p_m = 0.6076/\bar{R} - 0.032/\bar{R}^2 + 0.209/\bar{R}^3 \quad (3)$$

当  $1.00 \leq \bar{R} \leq 10.00$  时, 有

$$\Delta p_m = 0.0649/\bar{R} + 0.3973/\bar{R}^2 + 0.3226/\bar{R}^3 \quad (4)$$

式中:  $P(t)$  为 TNT 爆轰波峰值超压;  $t$  为时间;  $t_1$  为超压峰值时间;  $\Delta p_1$  为爆炸超压峰值;  $\bar{R}$  为等效比例距离,  $\bar{R} = H/\sqrt[3]{W}$ ;  $W$  为炸药的重量;  $H$  为爆炸物高度;  $\Delta p_m$  为入射超压.  $t_1$  根据李国豪<sup>[14]</sup>提出的如下公式计算:

$$t_1 = (\rho_0/e_{\text{tot}})^{1/2} \bar{R}^{5/2} \quad (5)$$

$$e_{\text{tot}} = 1.05e \quad (6)$$

式中:  $\rho_0$  为空气密度;  $e_{\text{tot}}$  为总应变能;  $e$  为每单位质量的应变能.

图 1 给出了 Henrych 爆炸冲击波超压峰值随距离改变而变化的趋势. 从图中可以看出超压峰值伴随着距离的增加而快速下降且呈现指数分布的特点. 当冲击波作用在梁上时, 在梁的表面发生了反射. 反射力如式(7)所示<sup>[15]</sup>:

$$\Delta p_1 = 2\Delta p_m + 6\Delta p_m^2/(\Delta p_m + 7p_0) \quad (7)$$

式中:  $p_0$  为空气压力.

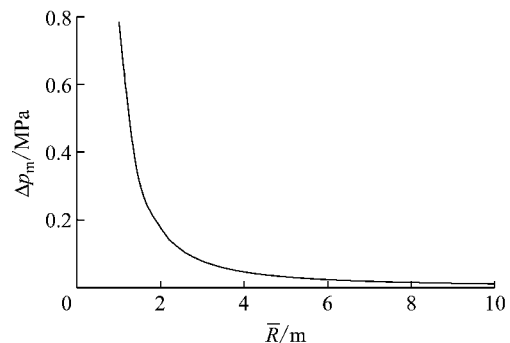


图 1 超压峰值与距离的关系

Fig. 1 Relationship between overpressure and distance

### 1.2 修正的 Timoshenko 梁模型分析动力反应

#### 1.2.1 修正的 Timoshenko 梁模型

当爆炸荷载直接作用于构件表面时, 爆炸荷载可看作集中力; 当爆炸荷载远离构件表面时, 构件表面受荷面积逐渐增大. 一旦炸药与构件距离足够大, 爆炸荷载在整个构件的分布形式趋于非均匀化.

图 2 展示了在爆炸荷载作用下荷载  $P(t)$  沿着简支梁非均匀分布. 陈榕等<sup>[16]</sup>通过改进的 Timoshenko 梁理论模型得到横向振动偏微分方程如式(8)所示:

$$\frac{EI \partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} - \left( \rho I + \frac{\rho EI}{Gk} \right) \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} + \rho A \partial^2 y(x,t) / \partial t^2 - P(t) = 0 \quad (8)$$

式中:  $x$  为沿梁纵轴方向的坐标;  $I$  为梁横截面惯性矩;  $G$  为剪切模量;  $k$  为截面形状系数;  $EI$  为弯曲刚度;  $\rho$  为材料密度;  $A$  为梁截面;  $y(x,t)$  为结构振动模态函数.

由模态叠加法可知, 爆炸荷载作用下简支梁的

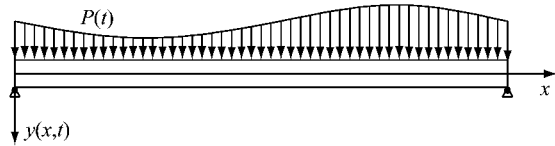


图 2 爆炸荷载作用下的简支梁  
Fig.2 Simply beam under blast load

振动形函数采用线性叠加模态.

$$y(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x)q_i(t) \quad (9)$$

式中:  $q_i(t)$  为广义时间坐标 ( $i=1, \dots, n, \dots, \infty$ );  $\phi_i(x)$  为简支梁模态函数,  $\phi_i(x) = \sqrt{2/m} \sin(i\pi x/l)$ ;  $l$  为简支梁长度;  $m$  为梁质量.

### 1.2.2 爆炸荷载作用下简支梁受力振动分析

将方程(9)代入方程(8),简化得到振动方程. 根据梁模态正交性, 振动方程两边乘以模态函数  $\phi_n(x)$ , 解耦方程得到

$$\rho[A + (n\pi/l)^2 I(1 + E/Gk)] \ddot{q}_n(t) + EI(n\pi/l)^4 \cdot q_n(t) = \sqrt{2m}P(t)[1 - \cos(n\pi)]/(n\pi) \quad (10)$$

令  $B = \rho[A + (n\pi/l)^2 I(1 + E/(Gk))]$  且  $D = EI(n\pi/l)^4$  并结合初始条件  $q_n(0) = \dot{q}_n(0) = 0$  计算得到  $t \leq \tau$  时梁位移响应方程为

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2\Delta p_1}{n\pi D} \right) (1 - \cos(n\pi)) \cdot \sin(n\pi x/l) [1 - t/t_1 - \cos(\sqrt{D/B}t) + \sqrt{B/D} \sin(\sqrt{D/B}t)/t_1] \quad (11)$$

式中:  $\tau$  为梁弹性阶段结束时间.

## 1.3 基于 Euler 梁模型动力反应分析

### 1.3.1 Euler 梁模型

当受到爆炸荷载作用时, 简支梁采用 Bernoulli-Euler 模型, 梁横向振动偏微分方程为

$$EI \partial^4 y(x,t) / \partial x^4 + \rho A \partial^2 y(x,t) / \partial t^2 = P(t) \quad (12)$$

### 1.3.2 爆炸荷载作用下简支梁受迫振动分析

将式(9)和式(1)代入式(12), 简化得到振动方程. 根据模态函数正交, 振动方程两边乘以函数  $\phi_n(x)$ , 在两边沿梁全长积分, 然后对方程解耦得

$$EI(n\pi/l)^4 q_n(t) + \rho A \partial^2 q_n(t) / \partial t^2 = \Delta p_1 (1 - t/t_1) \left( \frac{\sqrt{2m}}{n\pi} \right) [1 - \cos(n\pi)] \quad (13)$$

最终得到梁振动方程为式(14):

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2/m} \left( \frac{1 - \cos(n\pi)}{(EI)^{3/2} (n\pi)^7 t_1} \right) \cdot \sin(n\pi x/l) [\sqrt{2EIml^4} (n\pi)^2 \Delta p_1 (-t + t_1 - t_1 \cos(\sqrt{EI/(A\rho)} (n\pi)^2 t/l^2)) + \sqrt{2A\rho ml^2} \Delta p_1 \cdot$$

$$\sin(\sqrt{EI/(A\rho)} (n\pi)^2 t/l^2)], \quad t \leq \tau \quad (14)$$

## 1.4 Timoshenko 梁模型损伤控制条件

梁损伤控制条件是弯曲正应力小于等效许用应力,  $\sigma_{\max} \leq [\sigma]$ . 由材料力学可知, 梁弯曲曲线近似微分方程是  $M(x) = EI d\varphi/dx$  且弯曲正应力公式为  $\sigma = M(x)h/(2I)$ , 式中:  $M(x)$  为梁弯矩;  $\theta$  为梁弯曲时轴线与  $x$  轴夹角(由总位移引起);  $h$  为梁截面高度. 当 Timoshenko 梁弯曲时, 微段的变形如图 3 所示, 图中  $\varphi$  为弯矩引起的变形与梁初始轴线间的夹角;  $\beta$  为剪切作用引起梁变形产生的附加角度.

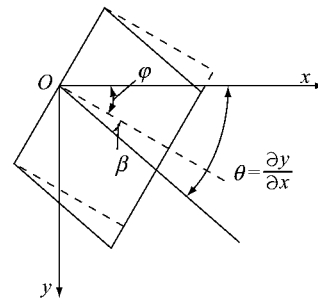


图 3 梁微段变形示意

Fig.3 Micro-segment of beam deformation

$$Q = AGk [\partial y(x,t) / \partial x - \varphi] \quad (15)$$

$$\varphi = \theta - \beta \quad (16)$$

式中:  $Q$  为剪力. 因此, 挠曲线与弯曲正应力之间的关系如式(17)所示:

$$\sigma = \left( \frac{Eh}{2} \right) \left[ \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} - \left( \frac{1}{AGk} \right) \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} \right] \quad (17)$$

受迫振动结束后, 梁位移持续增加. 因此控制在自由振动阶段的位移所产生的应力是确保梁未发生损伤破坏的重要条件.

$$\left( \frac{Eh}{2} \right) \left[ \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} - \left( \frac{1}{AGk} \right) \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} \right]_{\max} \leq [\sigma] \quad (18)$$

当知道剪力且将式(14)代入式(18), 可得到模型损伤控制条件.

## 1.5 修正 Timoshenko 梁与 Euler 梁理论模型塑性反应

### 1.5.1 梁跨中形成单铰

工程中爆炸荷载作用下梁变形会由弹性变形阶段进入塑性变形, 为了更好地贴近实际情况, 本文讨论修正的 Timoshenko 梁与 Euler 梁理论模型的塑性反应.

当简支梁进入塑性阶段时(在其跨中部分形成塑性铰)所形成的 2 根半梁绕塑性铰转动, 这时梁进入带损伤工作状态如图 4 所示, 图中:  $\varphi_0$  为梁弯曲时轴线与  $x$  轴夹角;  $M_0$  为梁塑性铰处弯矩值. 全梁控

制位移集中于跨中. 半梁各部分位移与跨中位移近似呈线性关系.

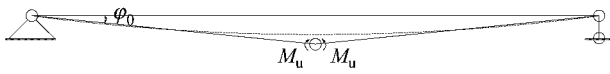


图 4 简支梁单塑性铰变形

Fig. 4 Single plastic hinge deformed of simple beam

为了便于力学分析求得计算控制方程, 取半梁为研究对象, 坐标系如图 5 所示.

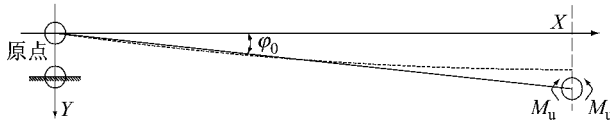


图 5 单塑性铰坐标系示意

Fig. 5 Coordinates schematic of single plastic hinge

塑性阶段控制方程为

$$\partial V/\partial x = -P(t) + m \ddot{y}_p 2x/l, \quad 0 \leq x \leq l/2 \quad (19)$$

式中:  $V$  为梁剪力;  $y_p$  为梁跨中塑性铰处位移. 初值与边值条件为

$$\begin{cases} y_p(\tau) = y_{er}, \dot{y}_p(\tau) = \dot{y}_{er} \\ M(0) = 0, M(l/2) = M_u \\ |V(0)| \leq |-V_0|, V(l/2) = 0 \end{cases} \quad (20)$$

式中:  $y_e$  为梁跨中弹性位移(未形成塑性铰时);  $y_{er}$  为弹性阶段结束时梁跨中位移;  $V_0$  为梁的最大剪力. 对方程(19)积分并通过(20)得到

$$y_p = (t - \tau) \left\{ \frac{-6M_u(t - \tau)}{ml^2} + \left( \frac{3\Delta p_1}{4m} \right) \left[ (t - \tau) + \frac{(2\tau^2 - t^2 - t\tau)}{3t_1} \right] + \dot{y}_{er} \right\} + y_{er} \quad (21)$$

当采用修正 Timoshenko 梁理论模型进行计算取  $x$  为  $l/2$  时, 有

$$y_{er} = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left( \frac{2\Delta p_1}{n\pi D} \right) (1 - \cos(n\pi)) \sin(n\pi/2) \cdot \left[ 1 - \frac{\tau}{t_1} - \cos\left(\sqrt{\frac{D}{B}} \cdot \tau\right) + \sqrt{\frac{B}{D}} \sin\left(\sqrt{\frac{D}{B}} \cdot \tau\right)/t_1 \right] \quad (22)$$

$$\dot{y}_{er} = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left( \frac{2\Delta p_1}{n\pi D} \right) (1 - \cos(n\pi)) \sin(n\pi/2) \cdot \left[ -\frac{1}{t_1} + \sqrt{\frac{D}{B}} \sin\left(\sqrt{\frac{D}{B}} \cdot \tau\right) + \cos\left(\sqrt{\frac{D}{B}} \cdot \tau\right)/t_1 \right] \quad (23)$$

当采用 Euler 梁理论模型进行计算取  $x$  为  $l/2$  时, 有

$$y_{er} = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sqrt{2/m}(1 - \cos(n\pi))}{(EI)^{3/2}(n\pi)^7 t_1} \cdot$$

$$\sin(n\pi/2) \left[ l^4 \sqrt{2EI} m (n\pi)^2 \Delta p_1 (-\tau + t_1 - t_1 \cos(\sqrt{EI/(A\rho)}(n\pi)^2 \tau/l^2)) + l^2 \sqrt{2A\rho m} \Delta p_1 \cdot \sin(\sqrt{EI/(A\rho)}(n\pi)^2 \tau/l^2) \right] \quad (24)$$

$$\dot{y}_{er} = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sqrt{2/m}(1 - \cos(n\pi))}{(EI)^{3/2}(n\pi)^7 t_1} \cdot \sin(n\pi/2) \left[ l^4 \sqrt{2EI} m (n\pi)^2 \Delta p_1 (-1 + t_1 \sqrt{EI/(A\rho)}(n\pi)^2 \sin(\sqrt{EI/(A\rho)}(n\pi)^2 \tau/l^2) \cdot \sqrt{2mEI} \Delta p_1 (n\pi)^2 \cos(\sqrt{EI/(A\rho)}(n\pi)^2 \tau/l^2) \right] \quad (25)$$

将式(21)分别代入修正的 Timoshenko 梁模型与 Euler 梁模型计算得  $y_{er}$  和  $\dot{y}_{er}$ , 便分别得到了简支梁在塑性阶段的位移响应函数.

### 1.5.2 梁跨中形成双铰

#### 1.5.2.1 塑性铰在梁两端形成

简支梁受到爆炸荷载作用经历弹性变形后进入塑性变形阶段, 除了形成单塑性铰外还可能形成双塑性铰. 简支梁形成双塑性铰变形如图 6 所示, 图中  $\xi_0$  为双塑性铰之间的距离.

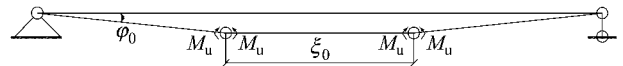


图 6 简支梁双塑性铰变形

Fig. 6 Double plastic hinge deformed of simple beam

当受到外荷载作用时, 简支梁产生 2 个移动塑性铰, 随着 2 个铰的相互移动最终成为 1 个铰. 为了便于计算建立如图 7 的坐标系.

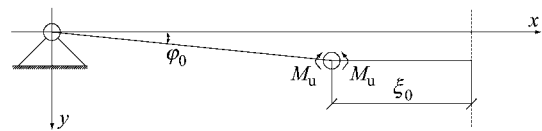


图 7 双塑性铰坐标系示意

Fig. 7 Coordinates schematic of double plastic hinge

取半梁为研究对象建立如图 7 所示直角坐标系, 其受力状态方程为

$$\partial V/\partial x = -P(t) + 2m \ddot{y}_p x/(l - \xi_0), \quad 0 \leq x \leq (l - \xi_0)/2 \quad (26)$$

边界与初值条件为

$$\begin{cases} M[(l - \xi_0)/2] = M_u, \quad M(0) = 0 \\ V[(l - \xi_0)/2] = 0, \quad |V(0)| \leq |-V_0| \\ y_p(\tau) = y_{er}, \quad \dot{y}_p(\tau) = \dot{y}_{er} \end{cases} \quad (27)$$

对方程(26)积分并应用(27)得到

$$y_p = (t - \tau) \left\{ \frac{-6M_u(t - \tau)}{m(l - \xi_0)^2} + (3\Delta p_1/4m) \cdot \left[ (t - \tau) + (2\tau^2 - t^2 - t\tau)/(3t_1) \right] + \dot{y}_{er} \right\} + y_{er} \quad (28)$$

当采用修正的 Timoshenko 梁理论模型计算时,  $y_{er}$  与  $\dot{y}_{er}$  运用式(22)与式(23).

当采用 Euler 梁理论模型计算时,  $y_{er}$  与  $\dot{y}_{er}$  运用式(24)与式(25).

### 1.5.2.2 塑性铰间距

考虑左右两端的动量变化,有

$$\partial m \dot{y}_p / \partial t = p_0 \quad (29)$$

最终求解得到塑性铰间距  $\xi_0$  为

$$\xi_0 = l - \sqrt{\frac{24M_u}{\Delta p_1(1-t/t_1)}} \quad (30)$$

### 1.5.3 荷载消失到双铰变为单铰

荷载消失时控制方程为

$$\partial V / \partial x = 2xm \ddot{y}_p / (l - \xi_0), \quad 0 \leq x \leq (l - \xi_0) / 2 \quad (31)$$

初值与边界条件同式(27),求得

$$y_p = -6M_u(t - \tau)^2 / [m(l - \xi_0)^2] + \dot{y}_{er}(t - \tau) + y_{er} \quad (32)$$

当 2 个塑性铰相遇变为 1 个时,  $\xi_0 = 0$ . 由式(32)  $y_p(t_2)$  与式(21)  $y_p(\tau)$  相等,得到

$$t_2 = m \dot{y}_{er} l^2 / (6M_u) + \tau \quad (33)$$

式中:  $t_2$  为双铰变单铰的时间.

### 1.6 简支梁自由振动阶段

简支梁自由振动控制方程为

$$\partial V / \partial x = m \ddot{y}_f 2x / l, \quad 0 \leq x \leq l / 2 \quad (34)$$

式中:  $y_f$  为自由振动阶段简支梁跨中位移. 方程初值与边界条件为

$$\begin{cases} y_f(t_1) = y_p(t_1) = y_{pr_1} \\ \dot{y}_f(t_1) = \dot{y}_p(t_1) = \dot{y}_{pr_1} \\ M(0) = 0, M(l/2) = M_u \\ V(l/2) = 0, |V(0)| \leq |-V_0| \end{cases} \quad (35)$$

最终解得

$$y_f = -6M_u(t^2 - t_1^2) / (ml^2) + (\dot{y}_{pr_1} + 12M_u t_1 / (ml^2))(t - t_1) + y_{pr_1} \quad (36)$$

式中:

$$y_{pr_1} = (t_1 - \tau) \{ -6M_u(t_1 - \tau) / (ml^2) + \Delta p_1(t_1 - \tau)^2 / (2mt_1) + \dot{y}_{er} \} + y_{er} \quad (37)$$

$$\dot{y}_{pr_1} = 3\Delta p_1(t_1 - \tau)(1 - \tau/t_1) / (4m) - 12M_u(t_1 - \tau) / (ml^2) + \dot{y}_{er} \quad (38)$$

通过代入 Timoshenko 梁与 Euler 梁的响应函数表达式可以得到在自由振动阶段简支梁跨中位移响应函数.

### 1.7 塑性阶段转换时间

当梁最大弯矩截面中受拉钢筋达到动力屈服时,认为进入塑性阶段,该截面形成塑性铰. 确定弹

性阶段终止时间  $\tau$ , 弹性终止条件如下.

当采用修正 Timoshenko 梁模型时,有

$$1 - \tau/t_1 - \cos(\tau\Omega/\sqrt{\gamma}) + \frac{\sin(\tau\Omega/\sqrt{\gamma})}{t_1\Omega/\sqrt{\gamma}} = \frac{M_u}{M_p} \quad (39)$$

式中:

$$\begin{cases} \Omega^2 = \frac{EI \int_0^l \phi_n(x) \phi_n^{(4)}(x) dx}{\rho A \int_0^l \phi_n^2(x) dx} \\ \beta = \frac{\int_0^l \phi_n(x) \phi_n^{(2)}(x) dx}{\int_0^l \phi_n^2(x) dx} \\ \gamma = 1 - \frac{I\beta}{A} \left( 1 + \frac{E}{Gk} \right) \\ \alpha = \frac{\int_0^l \phi_n(x) dx}{\int_0^l \phi_n^2(x) dx} \end{cases} \quad (40)$$

当采用 Euler 梁模型时,有

$$1 - \frac{\tau}{t_1} - \cos(\tau\Omega) - \frac{\sin(\tau\Omega)}{t_1\Omega} = \frac{M_u}{M_p} \quad (41)$$

式中:  $M_p$  为作用在梁上静荷载值等效于  $\Delta p_1$  时梁的屈服弯矩.

## 2 算例分析与数值模拟

### 2.1 有限元程序验证性分析

当前爆炸冲击领域数值模拟通常使用 ANSYS、LSDYNA FEM(Finite Element Method)程序. 有学者<sup>[17]</sup>应用该程序对试验进行数值模拟,将试验对比于 ANSYS、LSDYNA FEM 程序结果,可知受冲击荷载作用的简支梁,跨中位移误差范围为 -1.2% ~ -14%. Bao 等<sup>[18]</sup>采用 ANSYS、LSDYNA FEM 数值计算了爆炸荷载作用下钢筋混凝土柱残余强度. 通过有限元程序确立了几何模型且选取了材料模型. 分析模型并获得轴力和应变之间的关系. 从 Bao 等<sup>[18]</sup>与 Ghabossi 等<sup>[19]</sup>的研究中能够看到数值计算所得轴力曲线很好地与试验曲线相符. 基于上述讨论可知有限元程序能够很好模拟爆炸冲击现象.

### 2.2 算例分析

简支钢梁截面尺寸为 0.16 m × 0.12 m, 长度为 2 m, 密度为 7 800 kg · cm<sup>-3</sup>, 弹性模量为 206 GPa, 剪切模量为 80 GPa, 截面形状系数为 5/6, 泊松比为 0.28, 受到 TNT 爆炸荷载作用. 算例模型如图 8 所示.

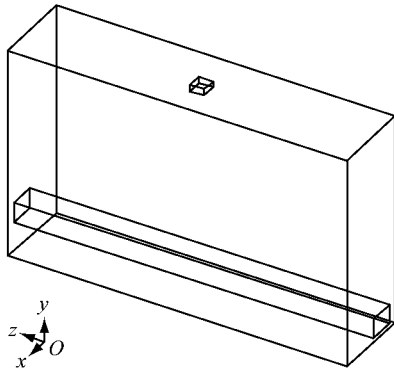


图 8 算例模型  
Fig.8 Example model

2.2.1 材料模型

TNT 炸药采用 High\_Explosive\_Burn 模型和 JWL (Jones-Wilkins-Lee) 状态方程, 方程式为

$$P = A_0(1 - \omega/(R_1V_0))E_0^{R_1V_0} + B_0(1 - \omega/(R_2V_0))E_0^{R_2V_0} + \omega E_0/V_0 \quad (42)$$

式中:  $P$  为静水压力 (以压为正);  $V_0$  为相对体积;  $E_0$  为每单位体积内能;  $A_0$ 、 $B_0$ 、 $R_1$ 、 $R_2$  和  $\omega$  为材料常数。

考虑 TNT: 密度为  $1631 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ; 起爆速度为  $6930 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ; 起爆压力 ( $P_{CJ}$ ) 为 21 GPa。

空气数值计算采用 NULL 模型和 Linear\_Polynomial, 状态方程如式(43)所示:

$$P = C_0 + C_1\mu + C_2\mu^2 + C_3\mu^3 + (C_4 + C_5\mu + C_6\mu^2)E_0 \quad (43)$$

式中:  $\mu = \rho_c/\rho_i - 1$ ,  $\rho_c$  为当前空气密度,  $\rho_i$  为初始空气密度;  $C_0 \sim C_6$  为状态方程参数。空气看作理想气体, 密度为  $1.23 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ 。

钢梁采用动力硬化模型。该模型适合模拟各项同性和动力塑性硬化材料。同时, 动力硬化模型可以用于梁、壳和固体单元。钢材应变率效应采用 Cowper-Symonds 模型。材料拉压屈服强度和应变率效应之间符合如下关系式:

$$\sigma_{dy} = \sigma_{sy}(1 + |\dot{\epsilon}/D_0|^{1/n_0}) \quad (44)$$

式中:  $\sigma_{dy}$  为钢材动力屈服强度;  $\sigma_{sy}$  为钢材静力屈服强度;  $\dot{\epsilon}$  为应变率;  $D_0$  和  $n_0$  为材料参数, 对于低碳钢二者取值分别为  $0.04 \text{ ms}^{-1}$  及 5。

2.2.2 单元选择及网格划分

单元选择 Solid 164。固体结构采用 3-D 模型, 图 9 详细展示了该单元模型。该单元定义为 8 节点单元, 每个节点具有 9 个自由度。

炸药与空气采用 Euler 算法且钢梁采用 Lagrange 算法。空气和钢梁之间的相互作用采用 ALE 算法。

炸药单元尺寸为  $20 \text{ mm} \times 20 \text{ mm} \times 20 \text{ mm}$ , 空

气单元尺寸为  $40 \text{ mm} \times 40 \text{ mm} \times 40 \text{ mm}$ , 钢梁单元尺寸为  $20 \text{ mm} \times 20 \text{ mm} \times 20 \text{ mm}$ 。有限元网格划分如图 10 所示。

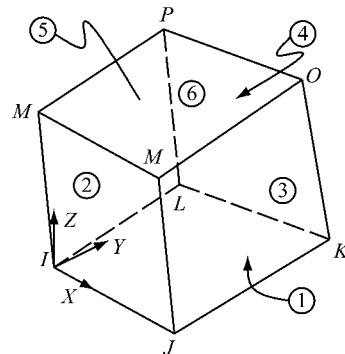


图 9 Solid 164 单元  
Fig.9 Solid 164 element

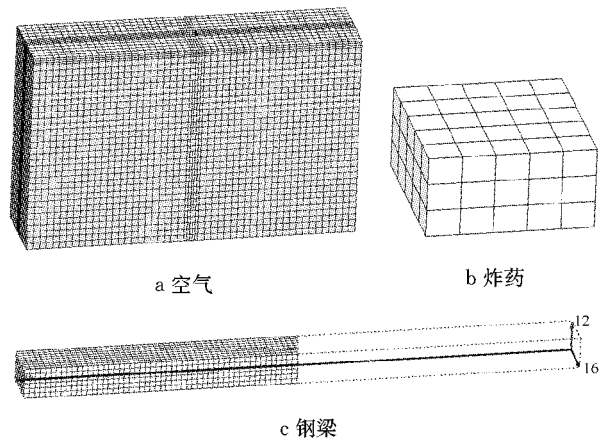


图 10 有限单元划分  
Fig.10 Finite element meshing

2.2.3 分析和结果

将爆炸荷载代入式(10)、式(12)中, 通过计算获得简支梁在不同时刻跨中最大位移。钢梁表面反射超压结果如图 11 所示。

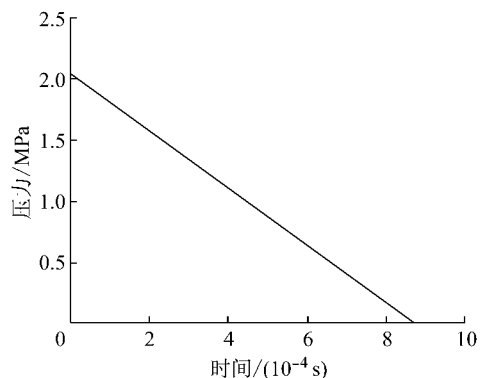


图 11 爆炸压力时程曲线  
Fig.11 Time history of blast loading

从图 12 可知: ①采用有限元模型、Timoshenko

梁模型和 Euler 梁模型计算结果都表明,爆炸荷载作用下简支梁跨中位移逐渐增加。从图 12 可以看出,在爆炸荷载作用下,梁跨中位移并不是很大,所以符合模型应用范围。②从图 12 中可知,修正的 Timoshenko 梁计算值接近于 Euler 梁理论值,但也有差异。可以看出 2 种理论值都不同于有限单元值。有如下的一些原因导致了图 12 所展现的情况:第一由于计算中式子各项存在舍入误差导致结果之间具有一定差异;第二由于数值计算中把梁离散为许多有限单元,每个单元会产生微小误差,伴随着时间的增长导致误差增大;第三,由于采用有限元模型算法与采用 Timoshenko 梁模型和 Euler 梁模型的理论方法不同,导致理论结果与数值结果的显著不同;第四,由于有限单元数值计算考虑了应变率效应,所以也导致了数值与理论结果之间的差异。③从图 12 可以看出,对比 Euler 梁模型计算值, Timoshenko 梁模型计算值更加光滑地接近于有限单元计算结果,这是由于修正 Timoshenko 梁理论考虑了剪切惯性效应。

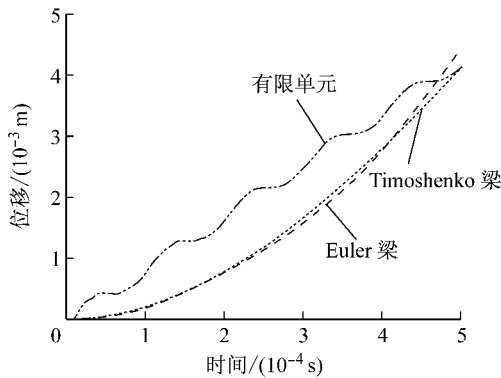


图 12 跨中位移时程曲线

Fig. 12 Time history of mid-span displacement

### 3 支撑条件变化对位移响应影响

实际工程结构简支梁施工情况较为复杂,端部支撑形式并不为理想铰接,即有阻尼作用又有弯矩等其他类型作用方式。为了更好地服务于工程实践,考虑简化梁端部约束模型作为研究对象,探讨支撑条件对位移响应的影响。

#### 3.1 两端支承梁动力方程及其求解

##### 3.1.1 广义坐标

图 13 表示荷载  $P(t)$  作用下  $A_s$  和  $B_s$  两支承端处梁受载示意图。

$$y(x,t) = y_0(t) + y_r(x,t) \quad (45)$$

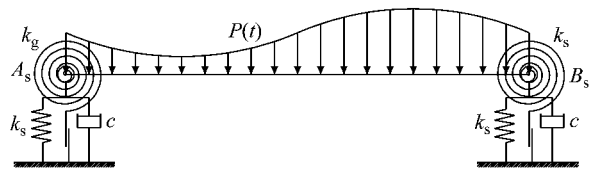


图 13 两端支承梁受载简图

Fig. 13 Load application schematic of double supports beam

式中:  $y_0(t)$  为支承  $A_s$  或  $B_s$  处竖向位移;  $y_r(x,t)$  为梁  $x$  处相对于端部的竖向位移

$$y_r(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} Y_i(t) \sin(i\pi x/l) \quad (46)$$

##### 3.1.2 梁动能与势能

梁动能  $T_d$  为

$$T_d = \frac{1}{2} \int_0^l m (\dot{y}_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \dot{Y}_i \sin(i\pi x/l))^2 dx \quad (47)$$

梁势能  $V_p$  为

$$V_p = k \dot{y}_0 + k_g \left( \frac{dy_r}{dx} \Big|_{x=0} \right)^2 + \frac{EI}{2} \int_0^l \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sum_{i=1}^{\infty} Y_i(t) \sin(i\pi x/l) \right]^2 dx \quad (48)$$

式中:  $k_s$  为支撑端部弹簧刚度系数;  $k_g$  为螺旋弹簧刚度系数。

##### 3.1.3 广义力

广义坐标  $y_0$  相对应的广义力为

$$Q_0 = P(t)l - 2c \dot{y}_0 \quad (49)$$

式中:  $c$  为端部支撑阻尼系数。对应于广义坐标  $Y_i$  的广义力为

$$Q_i = \begin{cases} 2lP(t)/(i\pi), & i = 1, 3, 5, \dots \\ 0, & i = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (50)$$

##### 3.1.4 动力方程

拉格朗日函数  $L$  写为

$$L = T_d - V_p \quad (51)$$

将式(47)至式(51)代入拉格朗日方程(52)

$$d(\partial L / \partial \dot{q}_i) / dt - \partial L / \partial q_i = Q_i \quad (52)$$

则有

$$\begin{cases} \ddot{y}_0 + \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} 2 \ddot{Y}_i / (i\pi) + \omega_k^2 y_0 = p/m - \omega_c \dot{y}_0 \\ 4 \ddot{y}_0 / (i\pi) + \ddot{Y}_i + \omega_g^2 Y_i(t) + \omega_s^2 Y_i(t) = 4p / (i\pi m), & i = 1, 3, 5, \dots \\ \ddot{Y}_i + \omega_g^2 Y_i(t) + \omega_s^2 Y_i(t) = 0, & i = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (53)$$

式中:

$$\begin{cases} \omega_k^2 = 2k/(ml) \\ \omega_s^2 = EI(\pi/l)^4/m \\ \omega_c^2 = 2c/(ml) \\ \omega_g^2 = 4k_g(\pi/l)^2/(ml) \end{cases} \quad (54)$$

3.2 参数变化及其讨论

两端支承梁所受爆炸荷载设置端部弹性支承系数、弯矩抵抗系数和阻尼系数,分别设定为  $r_k = \omega_k / (5\omega_s)$ ;  $r_g = \omega_g / (5\omega_s)$ ;  $r_c = \omega_c / (10\omega_s)$ . 通过 3 个参数的变化分析端支座竖向位移在总位移中所占比例变化之影响.

$$\bar{y}_c = y_{cm} / y_{sm} \quad (55)$$

式中:  $\bar{y}_c$  为跨中最大位移比;  $y_{cm}$  为跨中相对于端点的位移最大值;  $y_{sm}$  为跨中最大位移.

$$\bar{y}_A = y_{0m} / y_{sm} \quad (56)$$

式中:  $\bar{y}_A$  为端点最大位移比;  $y_{0m}$  为最大端点位移值.

$$y_{sm} = y_{0m} + y_{cm} \quad (57)$$

图 14a 描述  $t_d = 0.5 \text{ s}$ ,  $r_g = 0$  时  $\bar{y}_A$  与  $r_k$  和  $r_c$  的关系. 图 14b 描述  $t_d = 0.5 \text{ s}$ ,  $r_g = 0$  时  $\bar{y}_c$  与  $r_k$  和  $r_c$  的关系. 由图 15a 可知  $\bar{y}_A$  随  $r_k$  及  $r_c$  增加而减小,

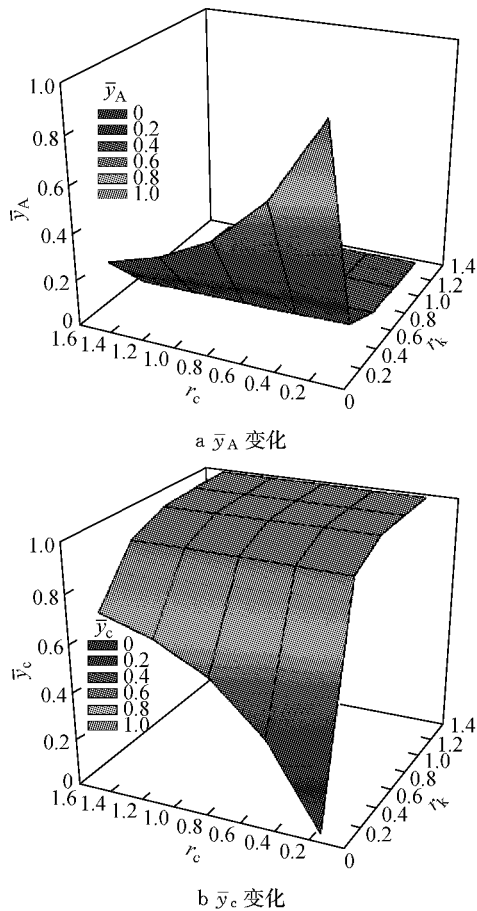


图 14  $t = 0.5 \text{ s}$ ,  $r_g = 0$  时  $\bar{y}_A$  与  $\bar{y}_c$  变化  
Fig. 14  $\bar{y}_A$  and  $\bar{y}_c$  tendency at  $t = 0.5 \text{ s}$ ,  $r_g = 0$

$y_{0m}$  在梁总位移中所占比重逐渐变小并最终趋于零, 这时应看作为简支情况. 由图 14b 可见, 伴随着  $r_k$  和  $r_c$  的逐渐增加  $y_{cm}$  在梁位移的总比重中逐渐增加, 当  $r_k$  和  $r_c$  增加到一定程度时该位移在总位移比重中近似为 1.

图 15a 为当  $t = 0.5 \text{ s}$ ,  $r_g = 0.5$  时  $\bar{y}_A$  随  $r_k$  与  $r_c$  变化, 从中可以看出  $y_{0m}$  也是随着  $r_k$  及  $r_c$  的增加逐渐减少. 图 15a 与图 14a 相比由于  $r_g$  的增加可以看出随着  $r_c$  的增加, 由于阻尼增加而减少的  $y_{0m}$  总量在总位移中所占比重下降. 也就是说, 随着  $r_k$  与  $r_c$  的增长, 增加  $r_g$  的同时也增加了梁端部位移在总位移中所占比重. 反之如图 15b 所示梁跨中位移在总位移中所占比例与图 14b 相比有所降低.

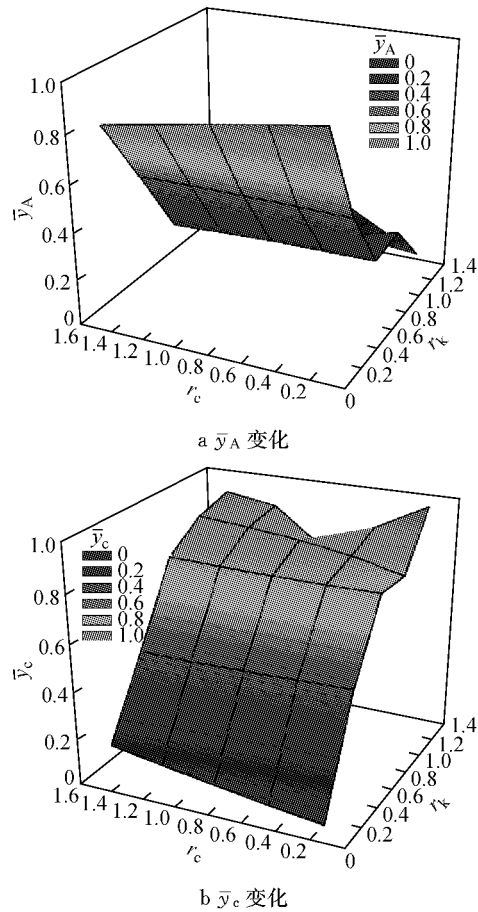


图 15  $t = 0.5 \text{ s}$ ,  $r_g = 0.5$  时  $\bar{y}_A$  与  $\bar{y}_c$  变化  
Fig. 15  $\bar{y}_A$  and  $\bar{y}_c$  tendency at  $t = 0.5 \text{ s}$ ,  $r_g = 0.5$

从以上的分析可知,  $r_g$  的增加可以对梁的端部位移与梁中部位移在总位移中所占的分配比例产生调节作用. 该系数增加时梁端部位移在总位移中所占比例增加, 而中部位移则相应减少, 当该系数达到某一值时二者可以接近持平. 可以说弯矩抵抗系数的增加能够使构件在遭受外部荷载作用时梁构件得到充分利用, 防止由于一点破坏而导致结构失效.



### 3.3 一端支承梁动力方程及其求解

当两端支承梁的一端  $k_g$ 、 $k_s$  及  $c$  为零,但另一端  $k_g$  为无穷大时,图 16 所示模型近似于悬臂状态。

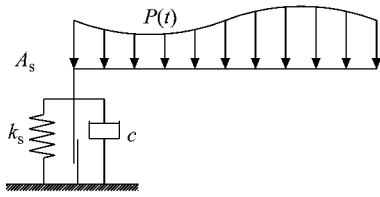


图 16 悬臂梁受载模型

Fig.16 Load schematic of cantilever beam

#### 3.3.1 广义坐标

图 16 表示  $P(t)$  作用下梁受载情况,位移方程同式(45),但  $y_r(x,t)$  取值不同。

$$y_r(x,t) = Y_n(t) \left[ \sin ax - \sinh ax + \frac{\sin aL + \sinh aL}{\cos aL + \cosh aL} (\cosh ax - \cos ax) \right] \quad (58)$$

式中:  $a=1.88/L$ 。

#### 3.3.2 梁动能和势能

$T_d$  为

$$T_d = \frac{1}{2} \int_0^l m (\dot{y}_0 + \dot{y}_r(x,t))^2 dx \quad (59)$$

$V_p$  由弹簧和梁的势能组成,为

$$V_p = k y_0^2 + \frac{EI}{2} \int_0^l [\partial^2 y_r(x,t) / \partial x^2]^2 dx \quad (60)$$

#### 3.3.3 广义力

$y_0$  相对应的广义力,为

$$Q_0 = P(t)l - c \dot{y}_0 \quad (61)$$

对应于广义坐标  $Y_n$  的广义力为

$$Q_n = \frac{8 \sin^2(aL/2) \sinh^2(aL/2)}{a \cos(aL) + a \cosh(aL)} \quad (62)$$

#### 3.3.4 动力方程

拉格朗日函数为式(63)

$$d(\partial L / \partial \dot{q}_j) / dt - \partial L / \partial q_j = Q_j \quad (63)$$

其中:  $q_j$  为广义坐标( $j=0,1,2,\dots$ ),则有

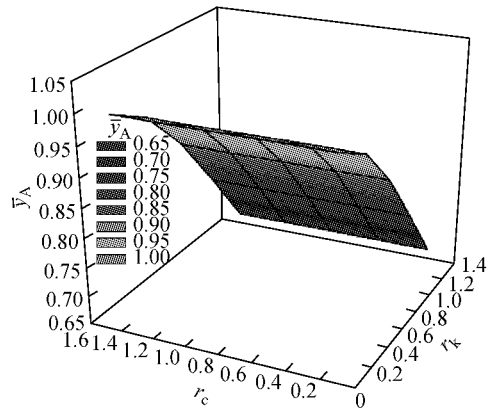
$$\begin{cases} (1 - \omega_k^2) \ddot{y}_0 + \omega_c \dot{y}_0 / 2 + A_0 \dot{Y}_j(t) / l = P/m \\ \ddot{y}_0 + \dot{Y}_j(t) (A_1 + A_2 + A_3) / A_0 + \omega_s^2 (al / \pi)^4 (B_1 + B_2 + B_3) Y_j(t) / A_0 = 1/m \end{cases} \quad (64)$$

### 3.4 参数变化及其讨论

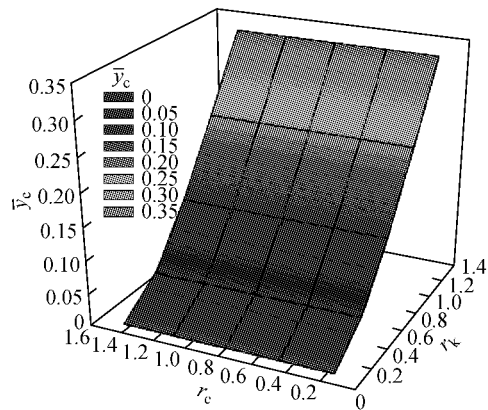
当受爆炸荷载作用时,一端支承梁端部弹性支承系数和阻尼系数分别定义为  $r_k = \omega_k / \omega_s$  和  $r_c = \omega_c / (2\omega_s)$ 。

从图 17a 可知,悬臂梁受到爆炸荷载作用时,端部位移在总位移中所占比重随着  $r_k$  的增加而减小,

而阻尼系数对该比重没有明显的影响。由上分析可知梁在爆炸荷载作用下弹簧支承对减少端部支座位移有很明显的作用,而阻尼对受爆炸荷载作用的梁端部位移减小作用并不明显。从图 17b 可知,非支承端相对于端点的位移最大值并不随着  $r_c$  的变化而变化,而随着  $r_k$  的增加而增加。所以爆炸荷载对梁跨中与端部之间的相对位移增量有明显影响。



a  $\bar{y}_A$  变化



b  $\bar{y}_c$  变化

图 17  $t=0.01$  s 时  $\bar{y}_A$  和  $\bar{y}_c$  变化

Fig.17  $\bar{y}_A$  and  $\bar{y}_c$  tendency at  $t=0.01$  s

## 4 结论

在爆炸荷载作用下,简支梁动力反应包括受迫振动(弹性、塑性)和自由振动。分别构建 2 种振动阶段的理论模型并将其用于计算爆炸荷载作用下响应位移函数。运用动力屈服条件求解简支梁塑性阶段转换时间;通过已算结果推导梁损伤控制条件。在自由振动阶段,阻尼影响不可忽视。当无阻尼作用时,受爆炸荷载作用的简支梁位移不断增大到最大值并以一个固定周期进行振动。但由于实际工程中阻尼存在,随时间增长梁自由振动不断减小。由此可知,简支梁最大位移很大程度依赖于爆炸荷载的强弱。

分别采用 Euler 梁模型和修正 Timoshenko 梁模型计算爆炸荷载作用下简支梁动力反应. 模态叠加分析表明荷载作用下梁位移持续增加, 这与数值计算结果一致. 计算爆炸荷载作用下简支梁反应函数得出位移时程曲线, 进一步得出挠度和应力间关系用来判定梁的屈服. 与 Euler 梁模型相比, 修正 Timoshenko 梁结果更加光滑接近于有限单元的数值计算. 这是由于修正 Timoshenko 梁理论中考虑了剪切惯性效应的缘故.

运用两端支承条件下梁动力响应的现有结论与第二类拉格朗日方程共同建立了弹性与阻尼支承梁的动力方程. 通过对梁在爆炸荷载作用下动力响应分析可知, 增大支承弹簧刚度系数、螺旋弹簧刚度系数和阻尼系数对两端支承梁的位移响应有很大影响. 研究表明当两端支承梁端部具有支撑弹簧、螺旋弹簧及阻尼器 3 种设置时, 可以避免在爆炸荷载作用下由于梁未发生破坏而端部提前发生破坏导致结构整体失效, 从而可以充分利用构件的抵抗性能, 提高构件的抗爆能力.

通过对爆炸荷载作用下梁的动力响应分析可知, 弹性支承刚度对在瞬态爆炸荷载作用下梁端部位移在总位移中所占比重有很大影响. 当增大弹性支承系数时, 梁端处位移在总位移中所占比例迅速减小, 而与之相对应的是阻尼支承系数对在该种类型荷载作用下悬臂梁端部位移在总位移中所占比例改变不明显. 同时由理论计算可知梁非支承端处位移并不随支承端处弹性刚度与阻尼变化而变化.

## 参考文献:

- [1] ZHANG Ruiyang, PHILIPS B M. Performance and protection of base-isolated structures under blast loading[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2016, 142(1):1.
- [2] HAO Hong, HAO Yifei, LI Jun, *et al.* Review of the current practices in blast-resistant analysis and design of concrete structures[J]. *Advances in Structural Engineering*, 2016, 19(8):1193.
- [3] 丁阳, 陈晔, 师燕超. 室内爆炸超压荷载简化模型[J]. *工程力学*, 2015, 32(3):119.  
DING Yang, CHEN Ye, SHI Yanchao. Simplified model of overpressure loading caused by internal blast[J]. *Engineering Mechanics*, 2015, 32(3):119.
- [4] WANG Yiming, KO Mingyuan. The interaction dynamics of a vehicle traveling along a simply supported beam under variable velocity condition[J]. *Acta Mechanica*, 2014, 225(12):3601.
- [5] LIU Huahei, TORRES D M, AGRAWAL A K. Simplified blast-load effects on the column and bent beam of highway bridges [J]. *Journal of Bridge Engineering*, 2015, 20(10):1.
- [6] 匡志平, 杨秋华, 崔满. 爆炸荷载下钢筋混凝土梁的试验研究和破坏形态[J]. *同济大学学报(自然科学版)*, 2009, 37(9):1153.  
KUANG Zhiping, YANG Qiuhua, CUI Man. Experiment research and failure modes analyses of RC-beams under blast loading[J]. *Journal of Tongji University (Natural Science)*, 2009, 37(9):1153.
- [7] STOCHINO Flavio. RC beams under blast load; Reliability and sensitivity analysis[J]. *Engineering Failure Analysis*, 2016, 66:544.
- [8] WANG Tong, LI Hongjing. Differential quadrature solution to initial-boundary-value problems for dynamic response of Euler beams[J]. *Journal of World Earthquake Engineering*, 2009, 25(4):75.
- [9] PARK S K, GAO X L. Bernoulli-Euler beam model based on an modified couple stress theory[J]. *Journal of Micromechanics and Micro-Engineering*, 2015, 16(11):2356.
- [10] KONG Shengli, ZHOU Shenjie, NIE Zhifeng, *et al.* The size-dependent natural frequency of Bernoulli-Euler micro-beams [J]. *International Journal of Engineering Science*, 2007, 46(5):427.
- [11] HILTON Harry H. Viscoelastic Timoshenko beam theory [J]. *Mechanics of Time-Dependent Materials*, 2009, 13(1):1.
- [12] CLOUGH R W, PENZIEN J. *Dynamics of structures* [M]. [S.l.]: Computers & Structures Incorporation, 1995.
- [13] BAKER W. *Explosions in air* [M]. Austin, Texas University Press, 1973.
- [14] 李国豪. *工程结构抗爆动力学* [M]. 上海: 科学技术出版社, 1989.  
LI Guohao. *Antiknock dynamics of engineering structures* [M]. Shanghai: Scientific & Technical Press, 1989.
- [15] 北京工业学院八系. *爆炸及其作用* [M]. 北京: 国防工业出版社, 1978.  
Beijing Institute of Technology Eight Department. *Explosion and its use* [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 1978.
- [16] 陈镛, 万春风, 薛松涛, 等. Timoshenko 梁运动方程的修正及其影响[J]. *同济大学学报(自然科学版)*, 2005, 33(6):711.  
CHEN Rong, WAN Chunfeng, XUE Songtao, *et al.* Modification of motion equation of Timoshenko beam and its effect[J]. *Journal of Tongji University (Natural Science)*, 2005, 33(6):711.
- [17] 孟一. 冲击荷载作用下钢筋混凝土梁的试验及数值模拟研究 [D]. 长沙: 湖南大学, 2012.  
MENG Yi. Experiment and numerical simulation study on reinforced concrete beam under impact loading [D]. Changsha: Hunan University, 2012.
- [18] BAO Xiaoli, LI Bing. Residual strength of blast damaged reinforced concrete columns[J]. *Impact Engineering*, 2010, 37(3):295.
- [19] GHABOSSI J, MILLAVEC W A, ISENBERG J, *et al.* Structures under impulsive loading [J]. *Journal of Structural Engineering*, 1984, 110(3):505.