第 47 卷第 2 期
2019 年 2 月
同济大学学报(自然科学版)
JOURNAL OF TONGJI UNIVERSITY(NATURAL SCIENCE)
Vol. 47 No. 2
Feb. 2019

文章编号：0253-374X(2019)02-0298-03
DOI：10.11908/j.issn.0253-374x.2019.02.020

临界完全图 Ramsey 数

李　燕，李雨生
(同济大学 数学科学学院，上海 200092)

摘要：设 G 和 H 是任意的图，Ramsey 数 $r(G,H)$ 定义为最小的正整数 r，使得图 K_r 的任意红蓝二边着色或存在单色的红色子图 G，或存在单色的蓝色子图 H. 临界星图 Ramsey 数 $r_*(G,H)$ 为最小的正整数 n，使得图 $K_r - K_{1,r-1-n}$ 的任意红蓝二边着色或存在单色的红色子图 G，或存在单色的蓝色子图 H. 在临界星图启发下，临界完全图 Ramsey 数 $r_K(G,H)$ 定义为最大的正整数 n，使得图 $K_r - K_n$ 的任意红蓝二边着色或存在单色的红色子图 G 或存在单色的蓝色子图 H. 这里 r 为 Ramsey 数 $r(G,H)$. 确定了 $r_K(W_{1,n},K_3)$ 和 $r_K(C_n,K_3)$，其中 $W_{1,n}=K_1+C_n$ 为轮.

关键词：Ramsey 数；临界星图 Ramsey 数；临界完全图 Ramsey 数.

中图分类号：O157.5　　**文献标志码**：A

Complete Critical Ramsey Numbers

LI Yan, *LI Yusheng*
(School of Mathematical Sciences, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: For graphs G and H, Ramsey number $r(G,H)$ is the smallest integer r such that every 2-coloring of K_r contains either a red copy of G or a blue copy of H. Star critical Ramsey number $r_*(G,H)$ is the smallest integer n such that every 2-coloring of K_r-$K_{1,r-1-n}$ contains either a red copy of G or a blue copy of H. Under the inspiration of star critical Ramsey number, complete critical Ramsey number $r_K(G,H)$ is the largest integer n such that every 2-coloring of K_r-K_n contains either a red copy of G or a blue copy of H. In this paper, $r_K(W_n,K_a)$ and $r_K(C_n,K_3)$ are determined. $W_n=K_1+C_{n-1}$ is a wheel of size n.

Key words: Ramsey number; star critical Ramsey number; complete critical Ramsey number

1　研究背景

文中研究的图均为简单图. 设 G 和 H 是任意的两个图. Ramsey 数 $r(G,H)$ 定义为最小的正整数 r，使得图 K_r 的任意红蓝二边着色或存在单色的红色子图 G，或存在单色的蓝色子图 H. 实际上，在 Ramsey 数的研究中，并不需要完全图的所有边即可找到单色的红色子图 G 或单色的蓝色子图 H. 因此，Hook 等[1]首先在文献[1]中提出临界星图 Ramsey 数 $r_*(G,H)$ 并确定了一些临界星图 Ramsey 数. 下面给出临界星图 Ramsey 数的定义.

定义 1　设 $r=r(G,H)$ 为 Ramsey 数，临界星图 Ramsey 数 $r_*(G,H)$ 定义为最小的正整数 n，使得图 $K_r - K_{1,r-1-n}$ 的任意红蓝二边着色或存在单色的红色子图 G，或存在单色的蓝色子图 H.

Hook 等在文献[1-3]中确定了 $r_*(T_n,K_m)=(n-1)(m-2)+1$，$r_*(nK_2,mK_2)=m$，$n\geqslant m\geqslant 1$，$r_*(P_n,C_4)=3$，$n\geqslant 3$ 和 $r_*(P_n,P_m)=\lceil m/2 \rceil$，$n\geqslant m\geqslant 4$等临界星图 Ramsey 数. Li 等在文献[4]中给出了 $r_*(K_n,mK_2)=n+2m-3$，$m\geqslant 1$，$n>2$，$r_*(F_n,K_3)=2n+2$，$n\geqslant 2$ 和 $r_*(nK_4,mK_3)=4n+2m$，$n\geqslant m\geqslant 1$，$n\geqslant 2$ 以及 $r_*(nK_4,mK_3)=3n+3m$，$m\geqslant n\geqslant 2$.

临界星图 Ramsey 数是在完全图中删掉最大星图的导出子图中寻找单色红色子图 G 或单色蓝色子图 H. 进一步发现，在寻找 Ramsey 数的过程中，完全图 K_r 的边可以在删掉星图后继续减少，仍然可能存在单色红色子图 G 或单色蓝色子图 H.

定义 2　设 $r=r(G,H)$ 为 Ramsey 数，临界完全图 Ramsey 数为最大的正整数 n，使得图 $K_r - K_n$ 的任意红蓝二边着色或存在单色的红色子图 G 或存在单色的蓝色子图 H.

收稿日期：2018-07-14
基金项目：国家自然科学基金(11871377)
第一作者：李　燕(1993—)，女，博士生，主要研究方向为组合数学与图论. E-mail：1610521@tongji.edu.cn

文中,$G+H$ 表示通过 G 和 H 之间完全连边所得到的图. 如果 $V(H)\subseteq V(G)$,$G\vee H$ 表示把 H 中不属于 $E(G)$ 的边添加到 G 中所得到的图. 如果 H 是 G 的子图,$G-H$ 表示从图 G 中删掉 H 的边所得到的图. $G\backslash H$ 表示从图 G 中删掉图 H 的点和边所得到的图. $N_G^{\mathrm{R}}(v)$ 和 $d_G^{\mathrm{R}}(v)$ 分别为顶点 v 在图 G 中的红邻域和红度,同理 $N_G^{\mathrm{B}}(v)$ 和 $d_G^{\mathrm{B}}(v)$ 分别为 G 中顶点 v 的蓝邻域和蓝度.

定理 1　当整数 $n\geqslant 5$ 时,$r_K(W_{1,n},K_3)=\lfloor n/2\rfloor$.

定理 2　当整数 $n\geqslant 4$ 时,$r_K(C_n,K_3)=\lfloor n/2\rfloor$.

2　主要结果的证明

引理 1[5]　当整数 $n\geqslant 5$,$r(W_{1,n},K_3)=2n+1$.

引理 2[6]　当整数 $n\geqslant 4$,$r(C_n,K_3)=2n-1$.

引理 3[2]　当整数 $n\geqslant 3$,$r_*(C_n,K_3)=n+1$. 当整数 $n\geqslant 5$,$r_*(W_{1,n},K_3)=n+3$.

定理 1 的证明. 因为 n 为奇数时证明与偶数类似,所以本文只证明偶数情况. 首先证明 $r_K(W_{1,n},K_3)\leqslant\lfloor n/2\rfloor$. 考虑图 $G=K_{2n+1}-K_{\frac{n}{2}+1}$,即 $K_{\frac{3n}{2}}\vee(n/2+1)K_1$. 令 $G_1=K_{n,\frac{n}{2}}$ 为蓝色二部图,其点集为 $V(G_1)=C_1\cup C_2$,C_i,$i=1,2$ 为红色团. $G_2=(n/2+1)K_1$ 与 C_1 连蓝边,与 C_2 连红边. 显然图 G 不存在红色的 $W_{1,n}$ 与蓝色的 K_3. 所以 $r_K(W_{1,n},K_3)\leqslant\lfloor n/2\rfloor$.

只需证明 $r_K(W_{1,n},K_3)\geqslant\lfloor n/2\rfloor$. 证明采用归纳假设法,当 $n=5$,$r(W_{1,5},K_3)=11$,$r_*(W_{1,5},K_3)=8$,则 $r_K(W_{1,5},K_3)=2$. 假设当 $n\geqslant 6$ 时,$r_K(W_{1,n-1},K_3)=\lfloor n-1/2\rfloor$. 考虑图 $G=K_{2n+1}-K_{\frac{n}{2}}$,即 $K_{\frac{3n}{2}+1}\vee n/2K_1$. 反证假设 G 中不存在红色 $W_{1,n}$ 和蓝色 K_3. 根据归纳假设 G 存在红色 $W_{1,n-1}$. 设 $W_{1,n-1}$ 中的中心点为 v,R_v 为点 v 在 $G\backslash W_{1,n-1}$ 的红邻域,B_v 为点 v 在 $G\backslash W_{1,n-1}$ 的蓝邻域,圈为 $C_{n-1}=a_1a_2\cdots a_{n-1}$. 令 $G_1=K_{\frac{3n}{2}+1}$,$G_2=\dfrac{n}{2}K_1$,$A=\{a_i\mid a_{i+1}\in G_1\}$,$A_1=\{a_i\mid a_i\in G_1,a_{i+1}\in G_1\}$,$B=\{a_i\mid a_{i+1}\in G_2\}$. 可知 $|A|\geqslant n/2$,$|A_1|\geqslant 1$,不妨设 $a_{n-1}\in A_1$,$v\in G_1$,则 $a_{n-1}a_1\in G_1$. 若 $v\in G_2$,$C_{n-1}\in G_1$,v 的任意红邻居至多可与 C_{n-1} 连一条红边,因此 C_{n-1} 至少存在红色 K_{n-2},可以找到一个新轮满足 $v\in G_1$.

情形 1　$|A_1|\geqslant 2$. 因不存在蓝色 K_3,B_v 中不存在蓝边. R_v 中亦无蓝边,若不然,存在蓝边 u_1u_2,$u_1\in G_1$,$u_2\in G_1$ 时,v 的任意红邻居至多可与 A 连一条红边,此时 C_{n-1} 中存在一点与 u_1u_2 都连蓝边形成蓝色 K_3,与假设矛盾. $u_1\in G_1$,$u_2\in G_2$ 时,$d_A^{\mathrm{R}}(u_1)\leqslant 1$,$d_{A_1}^{\mathrm{R}}(u_2)\leqslant 1$ 且 $d_A^{\mathrm{R}}(u_1)=1$ 时 $d_B^{\mathrm{R}}(u_1)=0$. $d_A^{\mathrm{R}}(u_1)=1$,$d_{A_1}^{\mathrm{R}}(u_2)=1$ 或者 $d_A^{\mathrm{R}}(u_1)=0$,$d_{A_1}^{\mathrm{R}}(u_2)=0$ 时,$C_{n-1}\cap G_1$ 中一定存在一点与 u_1u_2 都连蓝边,形成蓝色 K_3. $d_A^{\mathrm{R}}(u_1)=1$,$d_{A_1}^{\mathrm{R}}(u_2)=0$ 或 $d_A^{\mathrm{R}}(u_1)=0$,$d_{A_1}^{\mathrm{R}}(u_2)=1$,因为 $|A_1|\geqslant 2$ 所以 A_1 中存在一点与 u_1u_2 都连蓝边,形成蓝色 K_3.

$R_v\cap G_1$ 的点与 B_v 全连红边,若不然,存在蓝边 uw,$u\in R_v\cap G_1$,$w\in B_v$. $d_A^{\mathrm{R}}(u)\leqslant 1$,如果 $d_A^{\mathrm{R}}(u)=1$,设 ua_i,$a_i\in A$ 为红边,则 $d_C^{\mathrm{B}}(u)=n-2$,即 $C_{n-1}\backslash\{a_i\}$ 中无蓝边,w 与 $(C_{n-1}\backslash\{a_i\})\cap G_1$ 连红边,此时可找到以 a_{i+1} 为中心点的新的轮 $W_{1,n}$,矛盾. 如果 $d_A^{\mathrm{R}}(u)=0$ 且 $d_B^{\mathrm{R}}(u)=0$,$W_{1,n-1}$ 中无蓝边,w 与 $C_{n-1}\cap G_1$ 全连红边,形成红色 $W_{1,n}$. 若 $d_B^{\mathrm{R}}(u)=1$,设 ua_j,$a_j\in B$ 为红边,$d_{C_{n-1}}^{\mathrm{B}}(u)=n-2$,则 $C_{n-1}\backslash\{a_j\}$ 中不存在蓝边且 w 与 $(C_{n-1}\backslash\{a_j\})\cap G_1$ 全连红边. 此时若 $d_{C_{n-1}\cap G_1}^{\mathrm{R}}(a_j)\geqslant 1$,即可找到以 $N_{C_{n-1}\cap G_1}^{\mathrm{R}}(a_j)$ 任意一点为中心点的红色 $W_{1,n}$;$d_{C_{n-1}\cap G_1}^{\mathrm{R}}(a_j)=0$ 时,则 a_j 与 $C_{n-1}\cap G_1$ 全连蓝边,设 $K_{2n+1}\backslash(\{w\}\cup W_{1,n-1})$ 为 H,若 $d_H^{\mathrm{B}}(a_j)\geqslant 1$ 或 $d_H^{\mathrm{B}}(u)\geqslant 1$ 则可找到红色 $W_{1,n}$. 因此 $K_{2n+1}\backslash(\{w\}\cup W_{1,n-1})$ 为点 a_j 和 u 的公共红邻域. 检查 $N_H^{\mathrm{R}}(v)$ 可发现,$N_H^{\mathrm{R}}(v)$ 中任意一点与 a_j 必连红边,否则会产生以 $C_{n-1}\cap G_1$ 任意一点为中心点的红色 $W_{1,n}$,与 $C_{n-1}\cap G_1$ 必连蓝边,否则会产生以 v 为中心点的红色 $W_{1,n}$,并且 $N_H^{\mathrm{R}}(v)$ 中任意一点 x 满足 $d_H^{\mathrm{B}}(x)=0$,否则会产生以 $C_{n-1}\cap G_1$ 任意一点为中心点的红色 $W_{1,n}$. 至此可发现在 H 中,$N_H^{\mathrm{R}}(v)$ 与 $N_H^{\mathrm{B}}(v)$ 全连红边,产生红色 $W_{1,n}$,矛盾. 若 $d_B^{\mathrm{R}}(u)\geqslant 2$,设 ua_k,ua_l,a_k,$a_l\in B$,$k<l$ 为红边,$k=1$. 若 $k\neq 1$,即 ua_1 为蓝色,a_k,$a_l\in B$,a_{k+1},$a_{l+1}\in A$,且因为假设 $a_{n-1}\in A$,ua_{l+1} 为蓝色,a_1a_{l+1} 为红色,则 $a_1a_kua_la_{k+1}a_{n-1}a_{n-2}a_{l+1}a_1$ 与点 v 构成红色 $W_{1,n}$,矛盾. 此时改变圈 C_{n-1} 的下标,从 a_i 变为 a_{n-i},得到 $a_k\in A$,$d_A^{\mathrm{R}}(u)=1$,证明与上述相同.

设 $R_v\cap G_2$ 点为 $u_1u_2\cdots u_p$. 若 $R_v\cap G_2$ 的点与 B_v 全连红边,形成红色 $W_{1,n}$. 假设存在一点 $u_i\in R_v\cap G_2$,$w\in B_v$,$w\in G_1$,u_iw 为蓝边. $d_{A_1}^{\mathrm{R}}(u_i)\leqslant 1$. 若 $d_{A_1}^{\mathrm{R}}(u_i)=1$,设 u_ia_i 为红边,$a_i\in A_1$,则 u_i 与 $(C_{n-1}\backslash\{a_i\})\cap G_1$ 即 $B\cup A_1$ 全连蓝边,为不产生蓝色 K_3,w 与 $B\cup A_1$ 全连红边. 注意到若 $(C_{n-1}\backslash\{a_i\})\cap G_1$ 与 $B_v\backslash\{w\}$ 有边数超过 2 的红色匹配,即会产生中心点为 w 的红色 $W_{1,n}$. 所以 $(C_{n-1}\backslash\{a_i\})\cap G_1$ 必与 B_v 中至少 $|B_v|-2$ 个点全连蓝边. 又因为 R_v 中任意一点均与 $(C_{n-1}\backslash\{a_i\})\cap G_1$ 至少连一条蓝边,R_v 与 B_v 中

$|B_v|-2$ 个点连红边,且 $|B_v|\geqslant n/2+2$,$|(C_{n-1}\backslash\{a_i\})\cap G_1|\geqslant n/2-1$,产生红色 $W_{1,n}$. 所以若 $R_v\cap G_2$ 中存在点与 B_v 连蓝边则其在 A_1 中红度为 0. 又因为 $|R_v\cap G_2|=p$,则 $|A_1|\geqslant p$,$|B_v|\geqslant n/2+2$,所以 A_1 在 C_{n-1} 中为红色 K_p. B_v 中必存在一点 w_i 与红色 K_p 全连红边,否则为避免产生蓝色 K_3,R_v 与 B_v 全连红边形成红色 $W_{1,n}$. 注意到若 K_p 与 $B_v\backslash\{w_i\}$ 有边数超过 2 的红色匹配,即 $R_v\cap G_1$,K_p 和 B_v 会产生以 w_i 为中心点的红色 $W_{1,n}$. 所以 K_p 必与 B_v 中至少 $|B_v|-2$ 个点全连蓝边,R_v 与 B_v 中 $|B_v|-2$ 个点全连红边,R_v 与 B_v 产生红色 $W_{1,n}$.

情形 2 $|A_1|=1$ 时,$|A|=n/2$,$|B|=n/2-1$,$|C_{n-1}\cap G_2|=1$,设此点为 u. 同理,B_v 中不存在蓝边且 $R_v\cap G_1$ 中无蓝边,$R_v\cap G_1$ 的点与 B_v 全连红边. 只需确定点 u 的邻域即可证明定理 1. 已知 $(R_v\cap G_1)\cup B_v$ 为红色 K_n,若 $d^{\mathrm{R}}_{K_n}(u)\geqslant 3$,则形成红色 $W_{1,n}$. 因此 $|R_v\cap G_1|\leqslant 2$,uv 必为红边. $d^{\mathrm{B}}_{K_n}(u)\geqslant n-2$,$u$ 若与 C_{n-1} 连一条蓝边,则会产生红色 $W_{1,n}$,所以 u 与 C_{n-1} 全连红边产生红色 $W_{1,n}$.

情形 3 $|A_1|=0$ 时. n 为奇数时,$|A_1|\geqslant 1$ 时证明方法与情形 1 和情形 2 类似,$|A_1|=0$ 时,n 只可能为奇数,考虑图 $G=K_{2n+1}-K_{\frac{n-1}{2}}$,即 $K_{\frac{3n}{2}+\frac{3}{2}}\vee\dfrac{n-1}{2}\cdot K_1$,$|A|=\dfrac{n-1}{2}$,$|B|=\dfrac{n-1}{2}$,此时 $R_v\subseteq G_1$,$B_v\subseteq G_1$,由情形 1 可知 B_v 中不存在蓝边. R_v 中亦无蓝边且 B_v 与 R_v 全连红边,形成红色 $W_{1,n}$. 定理得证.

定理 2 的证明. 因为 n 为奇数时证明与偶数类似,所以本文只证明偶数情况. 考虑图 $G=K_{2n-1}-K_{\frac{n}{2}+1}$,即 $K_{\frac{3n}{2}-2}\vee(n/2+1)K_1$. 令 $G_1=K_{n-1,\frac{n}{2}-1}$ 为蓝色二部图,其点集为 $V(G_1)=C_1\cup C_2$,C_i,$i=1,2$ 为红色团. $G_2=(n/2+1)K_1$ 与 C_1 连蓝边,与 C_2 连红边. 显然图 G 不存在红色的 C_n 与蓝色的 K_3. 所以 $r_K(C_n,K_3)\leqslant\lfloor n/2\rfloor$.

只需证明 $r_K(C_n,K_3)\geqslant\lfloor n/2\rfloor$. 证明采用归纳假设法. 当 $n=4$ 和 $n=5$,$r(C_4,K_3)=7$,$r(C_5,K_3)=9$,$r_*(C_4,K_3)=5$,$r_*(C_5,K_3)=6$,则 $r_K(C_4,K_3)=2$,$r_K(C_5,K_3)=2$. 所以假设当 $n\geqslant 6$ 时,$r_K(C_{n-1},K_3)=\lfloor(n-1)/2\rfloor$. 考虑图 $G=K_{2n-1}-K_{n/2}$,即 $K_{3n/2-1}\vee n/2K_1$. 假设任意红蓝边着色下 G 中不存在红色 C_n 和蓝色 K_3,则由归纳假设可知图 G 中存在圈 $C_{n-1}=a_1a_2\cdots a_{n-1}$. 令 $G_1=K_{3n/2-1}$,$G_2=n/2K_1$,$A=\{a_i\mid a_{i+1}\in G_1\}$,$B=\{a_i\mid a_{i+1}\in G_2\}$. 可知 $|A|\geqslant n/2$. $G_1\backslash C_{n-1}$ 中无蓝边. 若不然,$G_1\backslash C_{n-1}$ 中存在蓝边 u_1u_2. 则 $d^{\mathrm{R}}_{C_{n-1}}(u_1)\leqslant 1$,$d^{\mathrm{R}}_{C_{n-1}}(u_2)\leqslant 1$,此时 C_{n-1} 中存在一点与 u_1u_2 都连蓝边,形成蓝色 K_3,矛盾. 所以 $G_1\backslash C_{n-1}$ 为红色完全图.

注意到 $G_1\backslash C_{n-1}$ 与 C_{n-1} 不能有边数超过 2 的红色匹配 u_1a_i,u_2a_j,除非 $j=i+1$ 或者 $j=i-1$,否则产生红色 C_n. 所以若 $G_1\backslash C_{n-1}$ 中存在一点 u 使得 $d^{\mathrm{R}}_{C_{n-1}}(u)\geqslant 1$,设为 ua_i,则 $d^{\mathrm{B}}_{C_{n-1}}(G_1\backslash(C_{n-1}\cup\{u\}))\geqslant(n-1)-1-2=n-4$. 令 $N=N^{\mathrm{B}}_{C_{n-1}}(G_1\backslash(C_{n-1}\cup\{u\}))$,$N\cup\{a_{i-1},a_{i+1}\}$ 中不存在蓝边否则会产生蓝色 K_3. 所以 u 与 $N\cap G_1$ 全连蓝边否则会产生红色 C_n. 同理 $G_2\backslash C_{n-1}$ 的任意一点 v,$d^{\mathrm{R}}_{N\cap G_1}(v)\leqslant 1$,因此 $G_2\backslash C_{n-1}$ 与 $G_1\backslash C_{n-1}$ 全部连红边,产生红色 C_n. 若 $\forall u\in G_1\backslash C_{n-1}$,$d^{\mathrm{R}}_{C_{n-1}}(u)=0$,因为 $G_2\backslash C_{n-1}$ 的任意一点与 C_{n-1} 至少连一条蓝边,所以 $G_2\backslash C_{n-1}$ 与 $G_1\backslash C_{n-1}$ 全部连红边,产生红色 C_n. 定理得证.

参考文献:

[1] HOOK J, ISAAK G. Star-critical Ramsey numbers [J]. Discrete Applied Mathematics, 2011,159(5):328.

[2] HOOK J. The classification of critical graphs and star-critical Ramsey numbers [D]. Bethlehem: Lehigh University, 2010.

[3] HOOK J. Critical graphs for $R(P_m,P_n)$ and the star-critical Ramsey numbers for paths[J]. Discuss Math Graph Theory, 2015, 35(4):689.

[4] LI Z, LI Y. Some star-critical Ramsey numbers[J]. Discrete Applied Mathematics, 2015, 181(1):301.

[5] BURR S A, ERDÖS P. Generalizations of a Ramsey-theoretic result of Chvatal [J]. Journal of Graph Theory, 1983, 7 (1): 39.

[6] FAUDREE RJ, SCHELP RH. All Ramsey numbers for cycles in graphs [J]. Discrete Mathematics, 1974, 8(4): 313.