

# 随机参数影响下橡胶密封垫的应力松弛特性

雷震宇<sup>1</sup>, 王志强<sup>1</sup>, 江 竹<sup>2</sup>

(1. 同济大学 铁道与城市轨道交通研究院, 上海 201804; 2. 西华大学 能源与动力工程学院, 四川 成都 610039)

**摘要:** 采用 Mooney-Rivlin 超弹性和 Prony 级数形式黏弹性模型, 将有限元结果与试验数据对比, 对模型参数进行验证。运用 Ansys-PDS 随机分析模块计算各随机参数对表面接触应力的灵敏度, 以及超弹性和黏弹性参数变化对表面接触应力松弛特性的影响。结果表明: 参数取值合理; 对表面接触应力影响较大的随机参数为  $\alpha_2$  和  $C_{10}$ ,  $\alpha_1$ 、 $\tau_1$  和  $C_{01}$  的影响次之, 而  $\tau_2$  的影响可以忽略不计; 松弛主要发生在加载第 1 天, 1 年内基本保持稳定; 超弹性参数取值越大, 应力衰减越小, 黏弹性参数则相反。

**关键词:** 橡胶密封垫; 应力松弛; 随机有限元法; 灵敏度分析

**中图分类号:** TU455.43

**文献标志码:** A

## Stress Relaxation Characteristics of Rubber Gasket Under Effect of Random Parameters

LEI Zhenyu<sup>1</sup>, WANG Zhiqiang<sup>1</sup>, JIANG Zhu<sup>2</sup>

(1. Institute of Rail Transit, Tongji University, Shanghai 201804, China; 2. School of Energy and Power Engineering, Xihua University, Chengdu 610039, China)

**Abstract:** The Mooney-Rivlin hyperelastic model and the Prony series viscoelastic constitutive model were used to verify the selected calculation parameters by finite element analysis compared with stress relaxation test data. Then, the Ansys-PDS module was used to analyze the sensitivity values of all random parameters to surface contact stress and the influence of hyperelastic and viscoelastic parameters on the surface contact stress relaxation. The results show that parameter values are reasonable. Random parameters which have great influence on the surface contact stress are  $\alpha_2$  and  $C_{10}$ , followed by  $\alpha_1$ ,  $\tau_1$  and  $C_{01}$ , and the effect of  $\tau_2$  is negligible. Relaxation mainly occurred on the first day of loading and remained basically stable within 1 year. The larger the values of hyperelastic parameters, the smaller the

stress attenuation is, and the opposite of viscoelastic parameters.

**Key words:** rubber gasket; stress relaxation; stochastic finite element method; sensitivity analysis

盾构法隧道的防水关系到隧道功能的正常发挥。盾构法隧道管片接缝间的密封主要通过埋设在接缝间的橡胶密封垫压缩后的弹性反力防水, 一般由橡胶密封垫与混凝土管片间的接触应力来表示橡胶密封垫弹性反力, 并要求表面接触应力大于水压。橡胶密封垫通常采用三元乙丙橡胶, 该橡胶具有优良的耐老化特性。然而, 橡胶具有与高分子材料类似的黏弹性特性, 在长期受压状态下, 会出现力学松弛现象<sup>[1]</sup>。在实际工程中, 管片接缝宽度可近似认为保持不变, 因此橡胶密封垫主要体现出应力松弛的力学行为。应力松弛的结果造成表面接触应力的衰减, 从而对隧道的防水能力产生直接的不利影响, 有可能无法满足隧道 100 年使用寿命的设计目标。

以往对盾构法隧道防水材料耐久性的研究, 大多数是以拉伸力学指标(如硬度、伸长率、拉伸强度等<sup>[2]</sup>)来评价防水材料耐久性。从橡胶密封垫的防水机理来看, 通过研究接触应力松弛行为的时变特性来评价橡胶作为防水材料的耐久性更有实用价值<sup>[3]</sup>。

由于原材料配比、加工误差等原因造成合成橡胶材料参数的不确定性。由文献[4-6]的研究结果可知, 材料的超弹性属性参数  $C_{10}$  和  $C_{01}$  的变异对橡胶密封垫表面接触应力的影响较大, 尤其  $C_{10}$  是影响抗水能力的主要因素, 但研究结果只能反映橡胶密封垫的短期力学行为, 对橡胶密封垫耐久性产生的影响鲜有文献讨论。力学松弛特性还涉及材料的黏弹

收稿日期: 2018-10-02

基金项目: 国家自然科学基金(11772230, 51408434); 西华大学汽车工程四川省高校重点实验室开放基金(SZJJ2017-014); 西华大学流体及动力机械教育部重点实验室开放基金(SZJJ2015-034)

第一作者: 雷震宇(1970—), 女, 副教授, 工学博士, 主要研究方向为地下结构工程。E-mail: leizhenyu@126.com

通信作者: 江 竹(1979—), 女, 副教授, 工学博士, 主要研究方向为动力工程。E-mail: 397470723@qq.com

性参数。

本文中采用超弹性-黏弹性本构模型,选择橡胶密封垫材料参数作为随机输入变量,以表面平均接触应力为分析目标,运用 Ansys-PDS 随机分析模块计算各随机参数对橡胶密封垫应力松弛特性的影响。结合应力松弛试验,分析应力松弛行为的时变特性规律。

## 1 橡胶应力松弛本构模型

Ansys 软件中采用广义 Maxwell 模型表示黏弹性行为,黏弹性模型是由一个非线性弹簧(见图 1 的 A 部分)和  $n$  个由弹簧和黏壶串联组成的 Maxwell 模型并联而成(见图 1 的 B 部分)<sup>[7]</sup>。A 部分体现了与时间无关的超弹性,本文中采用 Mooney-Rivlin 超弹性模型;B 部分体现了与时间响应密切相关的非线性黏弹性,本文中采用 Prony 级数形式黏弹性本构模型,该模型能较准确地表达橡胶的松弛特性<sup>[8]</sup>。模型中  $G_i (i=0,1,\dots,n)$  为剪切模量,  $\eta_i (i=0,1,\dots,n)$  为黏壶系数。

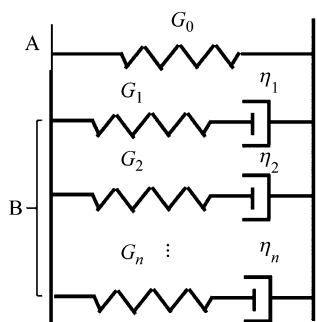


图 1 超弹性-黏弹性模型

Fig.1 Hyperelastic-viscoelastic model

### 1.1 超弹性本构模型

弹性橡胶密封垫在使用过程中始终处于压缩状态,本文中所分析的断面(见图 2)最大压缩率约为 35%,在不利工况下实际压缩率通常小于 35%。因此,采用两参数的 Mooney-Rivlin 超弹性模型,该模型几乎可以模拟所有橡胶的力学行为,一般适用于应变约为 100%(拉伸)和 30%(压缩)的情况。

应变能密度函数表达式如下所示:

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) \quad (1)$$

式中:  $C_{10}$  和  $C_{01}$  为材料力学参数;  $I_1$  和  $I_2$  分别为 Cauchy-Green 应变张量的第一和第二应变不变量。

### 1.2 黏弹性本构模型

在黏弹性单元中,体积形变和剪切形变行为是解耦的,黏弹性本构方程可写成如下形式<sup>[9]</sup>:

$$\sigma = \int_0^{t_0} 2G(t) \frac{de}{dt} dt + \mathbf{I} \int_0^{t_0} K(t) \frac{d\Delta}{dt} dt \quad (2)$$

式中:  $\sigma$  为 Cauchy 应力;  $G(t)$  为剪切松弛函数;  $K(t)$  为体积松弛函数;  $e$  为应变偏量部分;  $\Delta$  为体积应变部分;  $t_0$  为当前时间;  $\mathbf{I}$  为单位张量。式(2)中等号右边第一部分表示剪切形变引起的应力,第二部分表示体积形变引起的应力。

对于可视为不可压缩材料的橡胶来说,体积应变为零,因此式(2)中等号右边第二部分可以忽略不计,则橡胶的黏弹性本构方程可简化为

$$\sigma = \int_0^{t_0} 2G(t) \frac{de}{dt} dt \quad (3)$$

本文中采用 Prony 级数形式来表达式(3)中的剪切松弛函数  $G(t)$ ,如下所示:

$$G(t) = G(\infty) + \sum_{i=1}^n G_i e^{-t/\tau_i} \quad (4)$$

当时间  $t$  趋于无穷大时,  $G(\infty) = G_0$ ,  $G_0$  为图 1 中纯弹性元件的剪切模量。定义相对剪切模量

$$\alpha_i = \frac{G_i}{G_0} \quad (5)$$

式(4)两边同除以  $G_0$ ,则有

$$\frac{G(t)}{G_0} = 1 + \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{-t/\tau_i} \quad (6)$$

式(6)中  $\tau_i$  被称作松弛时间,定义式为

$$\tau_i = \eta_i / G_i \quad (7)$$

在有限元计算中,  $\alpha_i$ 、 $\tau_i$  即为反映材料黏弹性特性的参数。

## 2 有限元模型及计算参数的验证

### 2.1 有限元模型

盾构法隧道接头橡胶密封垫和管片沟槽尺寸如图 2 所示。模拟橡胶密封垫压缩采用的单侧压缩有限元模型如图 3 所示。压缩过程中,混凝土管片沟槽及上压板可视为刚体,而橡胶密封垫视为柔性体,沟槽、上压板与橡胶的接触采用刚-柔接触。

超弹性-黏弹性体的橡胶采用 plane183 单元;对于接触单元,采用 target169 单元和 contal72 单元。

### 2.2 计算参数的选取及验证

超弹性材料参数  $C_{10} = 0.700$  MPa,  $C_{01} = 0.035$  MPa<sup>[7]</sup>。根据文献[10],图 1 中 B 部分的黏弹性模型个数取 2,即  $n = 2$ ,对应的黏弹性参数  $\alpha_1 = 0.119\ 696$ ,  $\tau_1 = 241.820\ 8$ ,  $\alpha_2 = 0.475\ 895$ ,  $\tau_2 = 4.370\ 416$ 。

对如图 3 所示模型利用有限元分析软件 Ansys

进行确定参数的应力松弛计算,提取橡胶密封垫表面平均接触应力 $\bar{\sigma}_0$ 的计算结果,并与实测应力松弛对比,如图4所示。

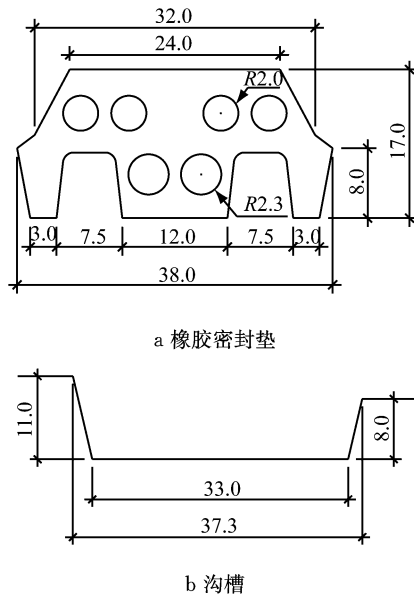


图2 橡胶密封垫及沟槽尺寸(单位:mm)

Fig.2 Dimension of rubber gasket and groove (unit:mm)

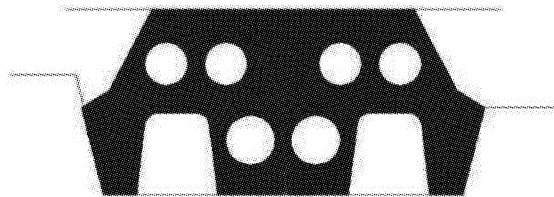


图3 橡胶密封垫单侧压缩有限元模型

Fig.3 Unilateral compressive finite element model for rubber gasket

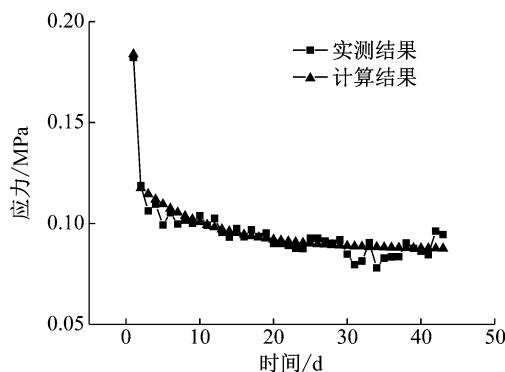


图4 实测和模拟应力松弛对比

Fig.4 Comparison of stress-relaxation between test and simulation results

从图4可见,计算结果与实测结果拟合度较好.计算所得橡胶密封垫表面平均接触应力 $\bar{\sigma}_0$ 的应力松弛率为51.0%,应力松弛试验结果为50.4%,两者相差0.6%,说明本文中所选取的材料参数取值合

理,所选取的本构模型也能较好地模拟橡胶密封垫的应力松弛行为。

由图4可知,在开始阶段应力下降较快,随着时间的增加,下降速度逐渐减小,应力曲线渐趋收敛,即橡胶密封垫上表面接触应力渐趋稳定。

### 3 各随机参数的统计特征

选定橡胶密封垫材料的超弹性参数 $C_{10}$ 、 $C_{01}$ 和黏弹性参数 $\alpha_i$ 、 $\tau_i$  ( $i=1,2$ )为随机参数,不考虑各变量之间的相关性.各变量随机分布和特征值以及统计特征如表1所示。

表1 随机输入变量的统计特征

Tab.1 Statistical characteristics of random input variables

变量名称	分布类型	均值	标准值	最小极限值	最大极限值
$C_{01}$ /MPa	截断正态分布	0.035 000	$0.05C_{01}$	0.027 9	0.044 0
$C_{10}$ /MPa	截断正态分布	0.700 000	$0.05C_{10}$	0.557 8	0.880 0
$\alpha_1$	截断正态分布	0.119 696	$0.05\alpha_1$	0.101 7	0.137 7
$\tau_1$	截断正态分布	241.820 800	$0.05\tau_1$	205.547 7	278.093 9
$\alpha_2$	截断正态分布	0.475 895	$0.05\alpha_2$	0.404 5	0.547 3
$\tau_2$	截断正态分布	4.370 416	$0.05\tau_2$	3.714 9	5.026 0

将随机参数信息输入 Ansys 软件的概率设计 PDS 模块中,可获得橡胶密封垫防水性能指标——表面接触应力的统计特征,作为随机参数灵敏度分析的基础。

### 4 随机参数的灵敏度分析

灵敏度分析是评价因设计变量或参数的改变而引起结构响应特性变化率的方法,可以分析随机因素对结构响应影响程度的大小。

灵敏度分析的方法有很多,本文中采用 Spearman 秩相关系数<sup>[11]</sup>来间接表示参数的灵敏度. Spearman 秩相关系数可用于度量变量之间联系的强弱,如果计算所得系数接近1或-1,就认为输入变量对输出变量影响显著,如果计算所得系数趋近0,就认为影响微弱.如果系数为正值,表明增加输入变量的值,输出变量的值也增加;如果系数为负值,表明增加输入变量的值,输出变量的值反而减小。

选取橡胶密封垫上、下表面的平均接触应力为分析目标,分别用 $\bar{\sigma}_u$ 与 $\bar{\sigma}_d$ 来表示。 $\bar{\sigma}_u$ 与 $\bar{\sigma}_d$ 对各随机变量的灵敏度如表 2 所示。通过表 2 数据分析可得以下结论:

(1) 各随机参数对上、下表面平均接触应力 $\bar{\sigma}_u$ 和 $\bar{\sigma}_d$ 的影响程度几乎相同。

(2) 以 $\bar{\sigma}_u$ 为例,影响程度依次为 $\alpha_2 > C_{10} > \alpha_1 > \tau_1 > C_{01}$ ,而 $\tau_2$ 的影响可以忽略不计。这说明采用本文二阶黏弹性模型,黏壶系数 $\eta_2$ 的变化对表面接触应力几乎不产生影响。

表 2  $\bar{\sigma}_u$ 与 $\bar{\sigma}_d$ 的灵敏度

Tab.2 Sensitivities of  $\bar{\sigma}_u$  and  $\bar{\sigma}_d$

分析 目标	各随机变量灵敏度					
	$C_{10}$	$C_{01}$	$\alpha_1$	$\tau_1$	$\alpha_2$	$\tau_2$
$\bar{\sigma}_u$	0.608	-0.011	-0.169	0.077	-0.742	-0.002
$\bar{\sigma}_d$	0.606	-0.011	-0.169	0.077	-0.744	-0.002

(3) 表 2 中, $C_{10}$ 和 $\tau_1$ 对应的灵敏度为正,表示 $C_{10}$ 和 $\tau_1$ 与表面接触压力正相关,而其余 4 个参数对应的灵敏度为负,表明这些参数与表面接触压力负相关。这一点也可以从如图 5 所示的 $\bar{\sigma}_u$ 随影响最大的 2 个随机输入参数 $C_{10}$ 和 $\alpha_2$ 变化的散点图体现出来。从图 5a 可知,增大 $C_{10}$ , $\bar{\sigma}_u$ 较显著地增大;从图 5b 可知,增大 $\alpha_2$ , $\bar{\sigma}_u$ 较显著地减小;从图 5c 可知, $\bar{\sigma}_u$ 随 $C_{01}$ 变化是均匀的。

## 5 橡胶密封垫应力松弛的长期特性分析

取松弛时间为 1 年,此时相邻 2 次应力计算结果差值小于 $10^{-4}$  MPa,说明应力松弛曲线已基本趋于稳定。分别作出超弹性随机参数、黏弹性随机参数以及综合考虑超弹性-黏弹性随机参数的最大极限值、均值和最小极限值下的橡胶密封垫表面接触应力曲线(见图 6),以探究应力松弛条件下橡胶密封垫防水能力的变化规律。

由图 6a~f 可以看出,橡胶密封垫表面接触应力整个松弛过程可大致分为 3 个阶段:急速衰减期,发生在受压后的第 1 天;缓慢衰减期,在随后的 100 天左右基本完成;最后进入稳定期,得到后期相邻 2 次应力计算结果差值均小于 $10^{-4}$  MPa。

在只考虑超弹性随机参数时(见图 6a、b),图中曲线从上到下依次为随机参数取最大极限值下的应力曲线、取均值下的应力曲线、取最小极限值下的应力曲线,说明该随机参数取值越大,应力松弛程度越小,同时再次印证了超弹性参数与表面接触应力,也即橡胶密封垫防水能力正相关。

在只考虑黏弹性随机参数时(见图 6c、d),情况

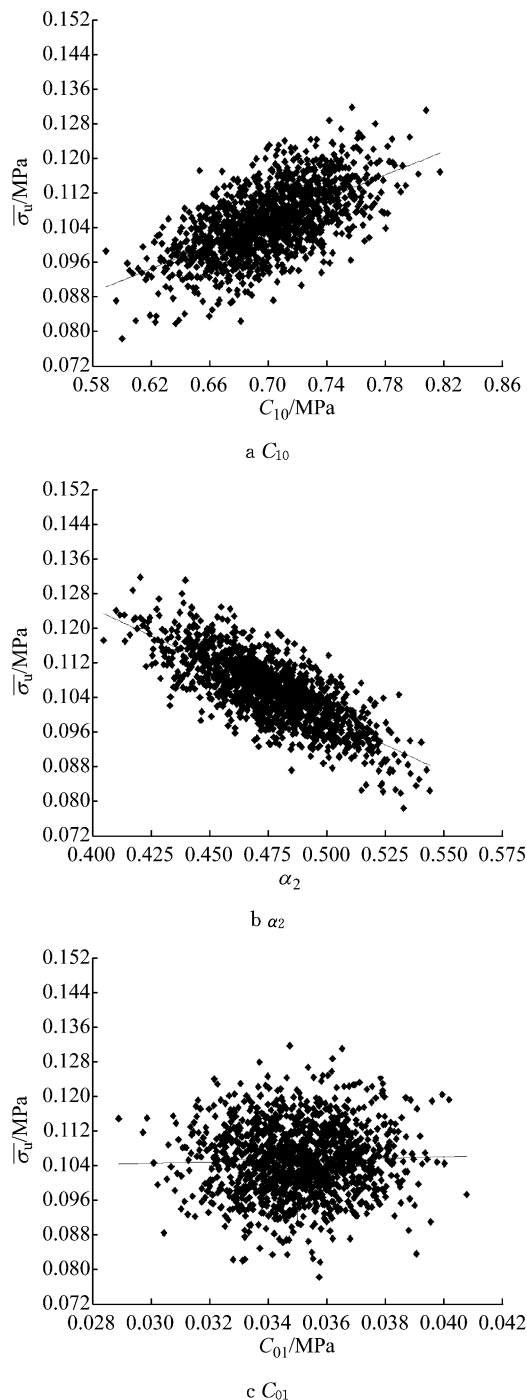


图 5  $\bar{\sigma}_u$ 与输入变量的散点图

Fig.5 Scatter diagrams of input variables and  $\bar{\sigma}_u$

正好相反,黏弹性参数越大,应力松弛程度越大。

在综合考虑超弹性-黏弹性随机参数时(见图 6e、f),2 种参数的作用相互抵消,3 条曲线趋于重合。

## 6 结论

(1) 随机参数对上、下表面平均接触应力 $\bar{\sigma}_u$ 和 $\bar{\sigma}_d$ 的影响程度几乎相同。以 $\bar{\sigma}_u$ 为例,影响程度依次为 $\alpha_2 > C_{10} > \alpha_1 > \tau_1 > C_{01}$ ,而 $\tau_2$ 的影响可以忽略不计,

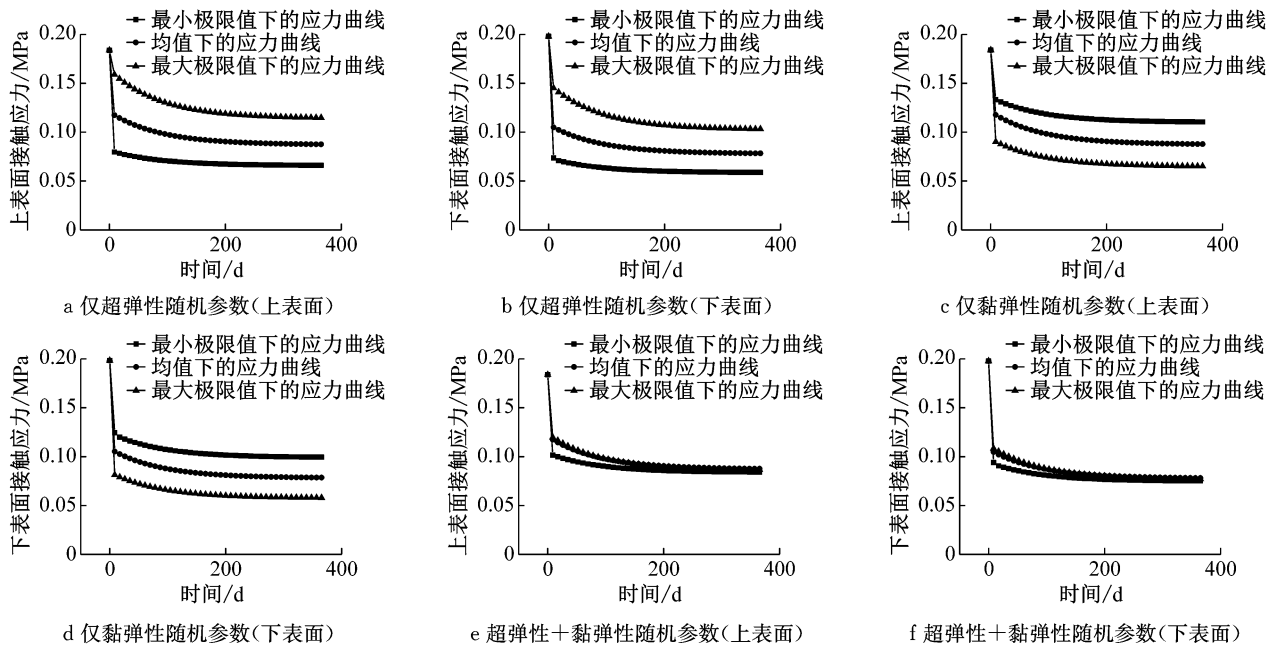


图6 表面接触应力松弛曲线

Fig.6 Contact stress relaxation curves on the surface

说明  $\eta_2$  的变化对表面接触应力几乎不产生影响。

(2) 增大  $C_{10}$ ,  $\bar{\sigma}_u$  较显著地增大;  $\bar{\sigma}_u$  随  $C_{01}$  的变化是均匀的。

(3) 橡胶密封垫表面接触应力整个松弛过程可大致分为3个阶段:急速衰减期,发生在受压后的第1天;缓慢衰减期,在随后的100天左右基本完成;最后,进入稳定期。同时发现,超弹性参数越大,应力松弛越小,黏弹性参数越大,应力松弛越大,该变化规律对评价橡胶密封垫作为防水材料的耐久性具有一定的工程意义。

#### 参考文献:

- [1] 刘礼华,熊威,张宏志,等.不可压缩超弹性止水材料的黏弹性计算方法研究[J].固体力学学报,2007,28(1):83.  
LIU Lihua, XIONG Wei, ZHANG Hongzhi, et al. Viscoelasticity calculation method for incompressible hyperelastic waterstop material[J]. Acta Mechanica Sinica, 2007, 28(1): 83.
- [2] STÖGBAUER H, WOLF A T. The influence of heat aging on one-part construction silicone sealants[J]. Construction and Building Materials, 1991, 5(1): 27.
- [3] 伍振志,杨林德,季倩倩,等.越江盾构隧道防水密封垫应力松弛试验研究[J].建筑材料学报,2009,12(5):539.  
WU Zhenzhi, YANG Linde, JI Qianqian, et al. Experimental study on stress relaxation of waterproof gasket for shield tunnel under river[J]. Journal of Building Materials, 2009, 12(5): 539.
- [4] 雷震宇,刘明.盾构管片弹性橡胶密封垫防水性能灵敏度分析[J].同济大学学报:自然科学版,2017,45(3):336.  
LEI Zhenyu, LIU Ming. Sensitivity analysis of waterproof performance of elastic rubber seals for shield segments[J]. Journal of Tongji University: Natural Science, 2017, 45(3): 336.
- [5] 雷震宇,刘明.具有随机参数的盾构管片弹性密封垫防水性能优化分析[J].应用数学和力学,2017,38(8):899.  
LEI Zhenyu, LIU Ming. Optimization analysis of waterproof performance of shield segment elastic seal with random parameters[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2017, 38(8): 899.
- [6] 雷震宇.盾构隧道管片橡胶密封垫的优化设计方法[J].地下空间与工程学报,2010,6(4):770.  
LEI Zhenyu. An optimal design approach for the rubber sealing gasket in shield tunneling[J]. Chinese Journal of Underground Space and Engineering, 2010, 6(4): 770.
- [7] 于海富,李凡珠,杨海波,等.有限变形下的橡胶材料非线性高弹-黏弹性本构模型[J].橡胶工业,2017,64(11):645.  
YU Haifu, LI Fanzhu, YANG Haibo, et al. Nonlinear high-elastic-viscoelastic constitutive model of rubber material under finite deformation[J]. Rubber Industry, 2017, 64(11): 645.
- [8] BERGSTRÖM J S, BOYCE M C. Constitutive modeling of the time-dependent and cyclic loading of elastomers and application to soft biological tissues[J]. Mechanics of Materials, 2001, 33(9): 523.
- [9] 刘晓东,张玉磊,郭为君.硅橡胶减振器振动试验的有限元模拟[J].噪声与振动控制,2010,30(5):173.  
LIU Xiaodong, ZHANG Yulei, GUO Weijun. Finite element simulation of vibration test of silicone rubber shock absorber[J]. Noise and Vibration Control, 2010, 30(5): 173.
- [10] 冯希金,危银涛,李志超,等.未硫化橡胶非线性黏弹性本构模型研究[J].工程力学,2016,33(7):212.  
FENG Xijin, WEI Yintao, LI Zhichao, et al. Study on nonlinear viscoelastic constitutive model of unvulcanized rubber[J]. Engineering Mechanics, 2016, 33(7): 212.
- [11] 王涛.基于Spearman秩相关系数的红外弱小目标检测[J].科学技术与工程,2017,17(2):234.  
WANG Tao. Infrared weak small target detection based on Spearman rank correlation coefficient[J]. Science Technology and Engineering, 2017, 17(2): 234.