第 47 卷第 9 期
2019 年 9 月

同 济 大 学 学 报(自 然 科 学 版)
JOURNAL OF TONGJI UNIVERSITY(NATURAL SCIENCE)

Vol. 47 No. 9
Sep. 2019

文章编号：0253-374X(2019)09-1355-04　　DOI:10.11908/j.issn.0253-374x.2019.09.017

圈与 K_4 的临界完全图 Ramsey 数

李　燕[1]，李雨生[1]，王　烨[2]

(1. 同济大学 数学科学学院，上海 200092；2. 上海立信会计金融学院 统计与数学学院，上海 201209)

摘要：对给定的 2 个图 G 和 H，Ramsey 数 $r(G,H)$是最小的正整数 r，使得对完全图 K_r 的边任意红蓝着色或存在红色子图 G、或存在蓝色子图 H. 临界完全图 Ramsey 数 $r_K(G,H)$是最大的正整数 n，使得图 K_r-K_n 的边任意红蓝着色或存在红色子图 G 或存在蓝色子图 H. 当正整数 $n\geqslant 5$ 时，$r_K(C_n,K_4)=\lfloor n/2\rfloor$，$C_n$ 为 n 个点的圈.

关键词：Ramsey 数；完全临界 Ramsey 数；圈

中图分类号：O157.5　　**文献标志码**：A

Complete Critical Ramsey Numbers of Cycle and K_4 Numbers

LI Yan[1]，*LI Yusheng*[1]，*WANG Ye*[2]

(1. School of Mathematical Sciences, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. School of Stats & Math, Shanghai Lixin University of Accounting and Finance, Shanghai 201209, China)

Abstract: For graphs G and H, Ramsey number $r(G,H)$ is the smallest integer r such that every red/blue edge coloring of K_r contains either a red copy of G, or a blue copy of H. Complete critical Ramsey number $r_K(G,H)$ is the largest integer n such that every 2-coloring of K_r-K_n contains either a red copy of G, or a blue copy of H. When positive integer $n\geqslant 5$, $r_K(C_n,K_4)=\lfloor n/2\rfloor$, C_n is cycle with n vertices.

Key words: Ramsey number; complete critical Ramsey number; cycle

G 和 H 均为简单图. $G+H$ 表示通过 G 和 H 之间完全连边所得到的图. 如果 $V(H)\subseteq V(G)$，$G\vee H$ 表示把 H 中不属于 $E(G)$的边添加到 G 中所得到的图. 如果 H 是 G 的子图，$G-H$ 表示从图 G 中删掉 H 的边所得到的图. $G\backslash H$ 表示从图 G 中删掉图 H 的点和边所得到的图. $N(v)$和 $d(v)$分别表示顶点 v 的邻域和度数. $N_G^R(v)$和 $d_G^R(v)$分别为顶点 v 在图 G 中的红邻域和红度，同理 $N_G^B(v)$和 $d_G^B(v)$为 G 中顶点 v 的蓝邻域和蓝度.

1　研究内容

设 G 和 H 是任意的 2 个图. Ramsey 数 $r(G,H)$定义为最小的正整数 r，使得图 K_r 的任意红蓝边着色存在红色子图 G 或蓝色子图 H. 实际上，在 Ramsey 数的实际研究中，发现完全图 K_r 在删掉某些边后仍然可能存在红色子图 G 或蓝色子图 H. Hook 和 Isaak 首先在文献[1]中提出临界星图 Ramsey 数 $r_*(G,H)$为最小的正整数 n，使得 $K_r-K_{1,r-1-n}$的任意红蓝边着色或存在单色的红色子图 G，或存在单色的蓝色子图 H. Hook 和 Isaak 在文献[1]以及 Hook 在文献[2]和文献[3]中确定了 $r_*(T_n,K_m)=(n-1)(m-2)+1$，$r_*(nK_2,mK_2)=m$，$n\geqslant m\geqslant 1$，$r_*(P_n,C_4)=3$，$n\geqslant 3$ 和 $r_*(P_n,P_m)=\lceil m/2\rceil$，$n\geqslant m\geqslant 4$ 等临界星图 Ramsey 数.

在完全图 K_r 中寻找删掉最大完全图使得导出子图中存在红色子图 G 或蓝色子图 H 的最大完全图的阶数，此最大阶数定义为临界完全图 Ramsey 数 $r_K(G,H)$.

定义 1　设 $r(G,H)$为 Ramsey 数，临界完全图 Ramsey 数为最大的正整数 n，使得图 K_r-K_n 的任意红蓝二边着色或存在单色的红色子图 G 或存在单色的蓝色子图 H.

定理 1　当整数 $n\geqslant 5$ 时，$r_K(C_n,K_4)=\lfloor n/2\rfloor$；$n=4$时，$r_K(C_4,K_4)=2$.

2　主要结果的证明

引理 1[4]　当整数 $n\geqslant 4$ 时，$r(C_n,K_4)=3n-2$.

收稿日期：2018-10-13
基金项目：国家自然科学基金(11871377)；上海市青年科技英才扬帆计划(19YF1435500)
第一作者：李　燕(1993—)，女，博士生，主要研究方向为组合数学与图论. E-mail:1610521@tongji.edu.cn
通信作者：王　烨(1987—)，女，理学博士，主要研究方向为组合数学与图论. E-mail:wangye@sfu.edu.cn

引理2[2] 当整数 $n\geqslant 5$ 时，临界星图 Ramsey 数 $r_*(C_n,K_4)=2n$.

定理1的证明。$n=4$ 时，$r(C_4,K_4)=10$，根据 $r(W_{1,6},K_4)=9$ 可知 K_9 中若不存在红色 K_4 与蓝色 C_4 必存在蓝色 $3C_3$，即可证 $K_{10}-K_2$ 中存在红色 K_4 或蓝色 C_4. 则 $r_K(C_4,K_4)=2$.

$n\geqslant 5$ 时，由于 n 为奇数时证明与偶数类似，所以只证明偶数情况. 当 n 为偶数，考虑图 $G=K_{3n-2}-K_{n/2+1}$. 令 $G_1=K_{n-1,n-1,n/2-1}$ 为蓝色三部图，其点集为 $V(G_1)=C_1\cup C_2\cup C_3$，$C_i$，$i=1,2,3$ 为红色团. $G_2=(n/2+1)K_1$ 与 C_1、C_2 连蓝边，C_3 连红边. G 不存在红色的 C_n 与蓝色的 K_4. 所以 $r_K(C_n,K_4)\leqslant\lfloor n/2\rfloor$.

现只需证明 $r_K(C_n,K_4)\geqslant\lfloor n/2\rfloor$. 证明采用归纳假设法. $n=5$，$r(C_5,K_4)=13$，$r_*(C_5,K_4)=10$，则 $r_K(C_5,K_4)=2$. 假设当 $n\geqslant 6$ 时，$r_K(C_{n-1},K_4)=\lfloor(n-1)/2\rfloor$. 考虑图 $G=K_{3n-2}-K_{n/2}$，即 $K_{5n/2-2}\vee n/2K_1$. 假设任意红蓝边着色下 G 不存在红色 C_n 和蓝色 K_4. 令 $G_1=K_{5n/2-2}$，$G_2=n/2K_1$. 证明需要引入引理3.

引理3 当整数 $n\geqslant 6$ 时，若图 $G=K_{3n-2}-K_{n/2}$ 中不存在红色 C_n 但存在红色 C_{n-1}，且 $G_1\backslash C_{n-1}$ 中存在蓝色 K_3，此时 G_1 中必可找到蓝色 K_4.

证明 设 $C_{n-1}=a_0\cdots a_{n-2}$，$A=\{a_i\mid a_{i+1}\in G_1\}$，$B=\{a_i\mid a_{i+1}\in G_2\}$，可知 $|A|\geqslant n/2$. 若 $C_{n-1}\cap G_2=\varnothing$，Hook 在文献[2]中已证明引理3成立. 假设 $|C_{n-1}\cap G_2|\geqslant 1$ 且 $G_1\backslash C_{n-1}$ 中存在蓝色 $K_3=u_1u_2u_3$. $d_A^{\mathrm{R}}(u_i)\leqslant 2$，$i=1,2,3$. 若不然令边 u_ia_i、u_ia_j、u_ia_k 为红边，u_ia_{i+1}、u_ia_{j+1}、u_ia_{k+1} 为蓝边，$i<j<k$. $a_{i+1}a_{j+1}a_{k+1}$ 中若存在一条红边则产生红色 C_n，$a_{i+1}a_{j+1}a_{k+1}$ 为蓝色 K_3 与 u_i 一起构成蓝色 K_4，矛盾. 同理若 $d_A^{\mathrm{R}}(u_i)=2$，则 $d_B^{\mathrm{R}}(u_i)=0$.

(1) 情形1. 若 $d_A^{\mathrm{R}}(u_i)=2$，$i=1,2,3$，有 $d_B^{\mathrm{R}}(u_i)=0$. 因为 $B\neq\varnothing$，所以 B 中存在一点与 $u_1u_2u_3$ 连蓝边，构成蓝色 K_4.

(2) 情形2. 若 $d_A^{\mathrm{R}}(u_1)=1$，$d_A^{\mathrm{R}}(u_i)=2$，$i=2,3$. 有 $d_B^{\mathrm{R}}(u_i)=0$，$i=2,3$. 当 $n\geqslant 12$ 时，$|A|\geqslant 6$，此时 A 中存在一点与 $u_1u_2u_3$ 连蓝边，构成蓝色 K_4. 当 $n=10$ 时，为避免蓝色 K_4，$|A|=n/2$，$|B|=n/2-1$ 且 $N_A^{\mathrm{R}}(u_i)\cap N_A^{\mathrm{R}}(u_j)=\varnothing$，$i,j=1,2,3$，$i\neq j$. 因此 $|C_{n-1}\cap G_1|=n/2$，$|C_{n-1}\cap G_2|=n/2-1$. $u_i(i=2,3)$ 与 B 全连蓝边，u_1 与 B 全连红边，$d_A^{\mathrm{R}}(u_1)=1$ 使得 u_1 与 C_{n-1} 中某相邻两点连红边，形成红色 C_n，与假设矛盾. $n=6,8$ 时证明类似.

(3) 情形3. 若 $d_A^{\mathrm{R}}(u_i)=1$，$d_A^{\mathrm{R}}(u_3)=2$，$i=1,2$，有 $d_B^{\mathrm{R}}(u_3)=0$. 同理，当 $n\geqslant 10$ 时，$|A|\geqslant 5$，此时 A 存在一点与 $u_1u_2u_3$ 连蓝边形成蓝色 K_4. 所以 $n=8$ 时，$|A|=4$，$|B|=3$ 且 $N_A^{\mathrm{R}}(u_i)\cap N_A^{\mathrm{R}}(u_j)=\varnothing$，$i\neq j$，$i,j=1,2,3$. 因此 $|C_{n-1}\cap G_1|=4$，$|C_{n-1}\cap G_2|=3$. 设 $A=\{a_0,a_1,a_2,a_3\}$，$B=\{b_0,b_1,b_2\}$，$C_7=b_0a_0b_1a_1b_2a_2a_3b_0$. 因 $d_A^{\mathrm{R}}(u_1)=d_A^{\mathrm{R}}(u_2)=1$，令 u_1a_0、u_2a_1 为红边，此时 u_3a_2、u_3a_3 为红边形成红色 C_n. 令 u_1a_0、u_2a_2 为红边，此时 u_3a_1、u_3a_3 为红边，u_1a_2、u_3a_2 为蓝边. 注意到 u_1b_0、u_1b_1、u_2b_2、u_3b_0、u_3b_1、u_3b_2 为蓝边否则产生红色 C_n. 为避免蓝色 K_4，b_0a_2、u_1b_2、u_2b_1 为红边，$C_n=b_0a_0u_1b_2a_1b_1u_2a_2b_0$. 令 u_1a_0、u_2a_3 为红边，$b_0u_1u_2u_3$ 形成蓝色 K_4. 令 u_1a_1、u_2a_2 为红边，$b_2u_1u_2u_3$ 形成蓝色 K_4. 令 u_1a_1、u_2a_3 为红边，u_3a_3、u_1b_1、u_3b_1 为蓝边. 且 u_1a_3 为蓝边，若 u_1a_3 为红边则产生红色. 若 b_1a_3 是蓝边，则 $b_1a_3u_3u_1$ 为蓝色 K_4；若 b_1a_3 是红边，则 $C_n=b_0a_0u_3a_2b_2a_1b_1a_3b_0$，矛盾. 令 u_1a_2、u_2a_3 为红边，则 u_1a_3、u_1b_2、u_2b_0、u_3b_0、u_3b_1、u_3b_2 为蓝边. 则 u_1b_0、u_2b_2 为红边否则产生蓝色 K_4. b_1b_2 为蓝边，u_1b_1 为红边否则产生红色 C_n. $n=6$时证明类似.

(4) 情形4. 若 $d_A^{\mathrm{R}}(u_i)=1$，$i=1,2,3$. 当 $n\geqslant 8$ 时同情形2. $n=6$，且 $|A|=3$，$|B|=2$. $N_A^{\mathrm{R}}(u_i)\cap N_A^{\mathrm{R}}(u_j)=\varnothing$，$i,j=1,2,3$，$i\neq j$. $|C_{n-1}\cap G_1|=3$，$|C_{n-1}\cap G_2|=2$. 设 $A=\{a_0,a_1,a_2\}$，$B=\{b_0,b_1\}$，$C_5=b_0a_0b_1a_1a_2b_0$. 因为 $d_A^{\mathrm{R}}(u_i)=1$，令 u_1a_0、u_2a_1、u_3a_2 为红边，则 u_1b_0、u_1b_1、u_2b_1、u_3b_0 为蓝边，为避免蓝色 K_4，u_2b_0、u_3b_1 为红边，产生 $C_6=b_0u_2a_1b_1u_3a_2b_0$，矛盾.

(5) 情形5. 存在 u_i 使得 $d_A^{\mathrm{R}}(u_i)=0$，证明类似.

至此已证明引理3，为证明定理1还需要一些说明. $|G_1|=5n/2-2\geqslant r(C_n,K_3)=2n-1$，$n\geqslant 6$. 所以 G_1 存在蓝色 $K_3=u_1u_2u_3$. 令 $H=G\backslash K_3=K_{5n/2-5}\vee n/2K_1$. 如果图 H 中可找到红色 C_{n-1}，根据引理3与假设矛盾，定理得证. 以下假设 H 的任意红蓝染色不存在红色 C_{n-1} 与蓝色 K_4. 根据归纳假设，$r_K(C_{n-1},K_4)=\lfloor(n-1)/2\rfloor$，$K_{5n/2-4}\vee(n-2)/2K_1$ 的任意红蓝染色一定存在红色 C_{n-1} 或蓝色 K_4. $H\vee\{u_3\}=K_{5n/2-4}\vee n/2K_1$，因为假设图 G 不存在蓝色 K_4，则 $H\vee\{u_3\}$ 的任意红蓝染色一定存在红色 $C=C_{n-1}$，所以在每种红蓝染色中此红色圈必定包含点 u_3，否则与 H 中不存在红色 C_{n-1} 的假设矛盾. 令 u_3 在 C 中的邻居为 a_0、a_1，由引理3，在 $G_1\backslash C$ 中不存在蓝色 K_3，在 $G\backslash K_3$ 中不存在红色 C_{n-1}，因此

$N_G^R(a_0)\cap N_G^R(a_1)=\varnothing$. 令 $F=G_1\setminus\{u_1,u_2\}$，$N_1=N_F^R(a_0)\cap N_F^B(a_1)$，$N_2=N_F^B(a_0)\cap N_F^R(a_1)$，$N_3=N_F^B(a_0)\cap N_F^B(a_1)$. 令 $C=a_0u_3a_2\cdots a_{n-2}$，设 a_1 的位置为 u_3. 令 $A=\{a_i|a_{i+1}\in G_1\}$，$B=\{a_i|a_{i+1}\in G_2\}$.

引理 4　对完全图 K_s 任意红蓝染色，$s\geqslant n+1$，$n\geqslant 6$，若图 K_s 存在红色哈密顿圈且不存在红色 C_{n-1} 与红色 C_n，则 K_s 中存在蓝色 K_3；若图 K_s 中存在红色哈密顿路（不存在红色哈密顿圈）且不存在红色 C_{n-1}、红色 C_n 与蓝色 K_3，则 K_s 的红色生成子图为 2 个连通的红团.

证明　若图 K_s 中存在红色哈密顿圈，设为 $C_s=c_1c_2\cdots c_s$. 反证假设图 K_s 不存在蓝色 K_3. 因为不存在红色 C_{n-1} 与红色 C_n，所以 c_1c_{n-1}、c_1c_n、c_2c_n、c_2c_{n+1}、c_3c_{n+1} 为蓝边. c_3c_n 若为红边，则 $c_3c_4\cdots c_{n-1}c_nc_3$ 为红圈 C_{n-2}，若 $d_{C_{n-2}}^R(c_2)\geqslant 2$，设 c_2c_i、c_2c_j，$i<j$ 为红边，则 c_2c_{i+1}、c_2c_{j+1} 为蓝边，若 $c_{i+1}c_{j+1}$ 为红边则产生红圈 C_n，则可找到蓝色 K_3，引理得证. 则 $d_{C_{n-2}}^R(c_2)\leqslant 1$，$d_{C_{n-2}}^R(c_{n+1})\leqslant 1$，$N_{C_{n-2}}^B(c_2)\cap N_{C_{n-2}}^B(c_{n+1})\neq\varnothing$，存在蓝色 K_3，因此 c_3c_n 为蓝边. 若 c_3c_1 为蓝边则 $c_3c_nc_1$ 为蓝色 K_3，与假设矛盾. c_3c_1 为红边，则 C_s 变为长度减 1 的圈 C_{s-1}. 继续上述步骤，因为 $s\geqslant n+1$，若不存在蓝色 K_3 即可找到红色 C_n.

若图 K_s 中存在红色哈密顿路（不存在红色哈密顿圈），设为 $D_s=d_1d_2\cdots d_s$，d_1d_s 为蓝边. 因为存在红色哈密顿圈且不存在红色 C_{n-1} 与红色 C_n，可找到蓝色 K_3，所以 d_1d_{n-1}，d_1d_n，…，d_1d_s，d_2d_n、d_2d_{n+1}，…，d_2d_s、d_3d_{n+1}，…，d_3d_s 均为蓝边. 注意必有 d_id_1 或 d_id_s，$i=2,\cdots,s-1$ 红边，否则产生蓝色 K_3 与假设矛盾. 若 d_id_s 为红边，$d_{i+1}d_s$，…，$d_{s-1}d_s$，均为红边，$d_{i+1}d_1$，…，$d_{s-1}d_1$ 均为蓝边，否则会产生红色哈密顿圈，产生蓝色 K_3. 若 d_jd_s 为红边，$d_{j-1}d_1$，…，d_2d_1 均为红边，$d_{j-1}d_s$，…，d_2d_s 均为蓝边，注意到 $i=j$ 或 $i=j+1$. 因 K_s 不存在蓝色 K_3 所以 $d_id_{i+1}\cdots d_s$ 与 $d_jd_{j-1}\cdots d_1$ 为连通红团，引理得证.

至此已证明引理 4. 在引理 4 第二部分的证明中，除去 d_i 与 d_j 外两红团全连蓝边，否则会产生红色 C_n.

事实 1　$N_3\neq\varnothing$.

反证假设 $N_3=\varnothing$. 若 $N_3=\varnothing$、$N_1\neq\varnothing$、$N_2\neq\varnothing$. N_1 与 N_2 完全连蓝边，否则产生红色 C_n. 由于 $G_1\setminus C$ 不存在蓝色 K_3，因此 N_1 与 N_2 为红团且 u_3 与 N_1、N_2 连蓝边. $|N_1+N_2|\geqslant 3n/2-3$，因为 $|N_2|\leqslant n-3$，否则 $|N_2\cup\{a_1\}|\geqslant n-1$，所以 $|N_1|\geqslant n/2$，$d_{C\setminus\{a_0\}}^R(v)=0$，$\forall v\in N_1$，若 $d_C^R(v)\geqslant 1$，N_1 与 C 存在红色 C_n. 同理 $d_{C\setminus\{a_1\}}^R(v)=0$，$\forall v\in N_2$. 因此 $C\setminus\{a_0,a_1\}$ 不存在蓝边. 则 $\forall v\in G_2\setminus C$，$d_{C\cap G_1}^R(v)\leqslant 1$，$d_{C\cap G_1}^B(v)\geqslant 1$，且 v、u_1、u_2 与 N_1、N_2 至少一个全连红边，$|G\setminus C|=2n-1$，根据鸽巢原理，N_1、N_2、$G_1\setminus C$ 中会产生红色 C_n.

若 $N_3=\varnothing$，$N_1\neq\varnothing$，$N_2=\varnothing$（$N_1=\varnothing$，$N_2\neq\varnothing$ 与情形 2 相同）. 此时 u_3 与 N_1 全连蓝边. 设 N_1 中的最长红路为 $Q=q_1q_2\cdots q_l$. $N_1\setminus Q\neq\varnothing$，否则 $|N_1|\geqslant 3n/2-3$，与 a_1 构成红色 C_n. 由于 Q 的极大性，q_1、q_l 与 $N_1\setminus Q$ 连蓝边，又因 $G_1\setminus C$ 不存在蓝色 K_3，q_1q_l 为红边，则 Q 与 $N_1\setminus Q$ 全连蓝边且 Q 与 $N_1\setminus Q$ 为红团. 同理 N_1 与 $C\setminus\{a_1\}$ 中点全连蓝边，C 中不存在蓝边，u_1、u_2 与 Q，$N_1\setminus Q$ 至少一个全连红边，$|G\setminus C|=2n-1$ 根据鸽巢原理，产生红色 C_n.

因为 $N_3\neq\varnothing$，总能在 N_3 中找到最长红路设为 $P=p_1p_2\cdots p_m$，若 $N_3\setminus P\neq\varnothing$，同理 P 与 $N_3\setminus P$ 为红色团且之间全连蓝边.

事实 2　$N_1=\varnothing$，$N_2=\varnothing$.

情形 1. 反证假设 $N_1\neq\varnothing$、$N_2\neq\varnothing$. 若 $N_3\setminus P=\varnothing$，$N_3$ 中可找到红色哈密顿路设为 $P=p_1p_2\cdots p_m$. $G_1\setminus C$ 不存在蓝色 K_3，所以 $d_{N_1}^B(p_1)=0$ 与 $d_{N_2}^B(p_1)=0$ 至少一个成立，p_m 同理. 若 $d_{N_1}^R(p_1)\geqslant 1$，$d_{N_2}^R(p_m)\geqslant 1$，根据引理 4，$G_1\setminus C$ 为 2 个连通红团，N_1 与 N_2 全连蓝边，分别属于 2 个红团，则 $a_0u_3a_1N_2\cdot p_m\cdots p_1N_1$ 中存在红色 C_n. 设 $d_{N_1}^B(p_1)=d_{N_1}^B(p_m)=0$，$d_{N_2}^B(p_1)=d_{N_2}^B(p_m)=|N_2|$，$p_1p_m$ 为红边否则产生蓝色 K_4，N_3 与 N_2 全连蓝边与 N_1 全连红边. N_3 为红团，N_1 与 N_2 全连蓝边. $\forall v\in N_2$，$d_{C\setminus\{a_1\}}^R(v)=0$，$\forall v\in N_3$，$d_C^R(v)\leqslant 1$，$|N_C^R(N_3)|\leqslant 1$. 若 $|N_1|\geqslant 2$，$\forall v\in N_1$，$d_{C\setminus\{a_0\}}^R(v)=0$. 所以 $C\setminus\{a_2\}$ 中无蓝边. $\forall v\in G_2\setminus C$，$d_{C\cap G_1}^R(v)\leqslant 1$ 且 $v\cup\{u_1,u_2\}$ 与 $N_1\cup N_3$ 或 N_2 全连红边（$|N_1|=1$ 时与 N_3 或 N_2 全连红边）. $|G\setminus C|\geqslant 2n-1$，产生红色 C_n. 因此 $N_3\setminus P\neq\varnothing$，$N_3\cup N_1\subseteq N_G^B(a_2)$，$N_3\cup N_2\subseteq N_G^B(a_1)$，$\forall v\in N_1\cup N_2$，$d_P^B(v)=0$ 与 $d_{N_3\setminus P}^B(v)=0$ 至少一个成立，并且 $\forall v\in N_1$、$u\in N_2$，$d_P^B(v)=0$、$d_{N_3\setminus P}^B(u)=0$ 或 $d_P^B(u)=0$、$d_{N_3\setminus P}^B(v)=0$. 不妨令 N_1 与 P 全连红边 N_2 与 $N_3\setminus P$ 全连红边. $N_1\cup P$ 与 $N_2\cup\{N_3\setminus P\}$ 为红团且之间全连蓝边，同理 C 不存在蓝边. $\forall v\in G_2\setminus C$、$d_{C\cap G_1}^R(v)\leqslant 1$、$d_{C\cap G_1}^B(v)\geqslant 1$ 且 $\{v\}\cup\{u_1,u_2\}$ 与 $N_1\cup P$ 或 $N_2\cup\{N_3\setminus P\}$ 全连红边，存在红色 C_n.

情形 2. 假设 $N_1\neq\varnothing$、$N_2=\varnothing$. 设 N_1 中最长红路为 $Q=q_1q_2\cdots q_l$. 若 $N_3\setminus P=\varnothing$、$N_1\setminus Q\neq\varnothing$，证明类似. 若 $N_3\setminus P\neq\varnothing$、$N_1\setminus Q\neq\varnothing$、$Q$ 与 $N_1\setminus Q$ 为红团且

全连蓝边，P 与 $N_3\backslash P$ 为红团且全连蓝边. $\forall v\in N_3$，$d_Q^B(v)=0$ 与 $d_{N_1\backslash Q}^B(v)=0$ 至少一个成立，证明同 $N_1\neq\varnothing$、$N_2\neq\varnothing$、$N_3\backslash P\neq\varnothing$ 相同.

若 $N_3\backslash P\neq\varnothing$、$N_1\backslash Q=\varnothing$. P 与 $N_3\backslash P$ 为红团且全连蓝边. 此时 $d_P^B(q_i)=0$ 或 $d_{N_3\backslash P}^B(q_i)=0$，$i=1,l$ 成立. 若 $d_P^B(q_1)=0$，必有 $d_P^B(q_l)=0$. 否则设 q_1 与 P 全连红边、q_l 与 $N_3\backslash P$ 全连红边，由引理 4，产生红色 C_n. 令两红团为 $N_1\cup P$ 与 $N_3\backslash P$. 因此 $\forall u\in N_1\cup P$、$v\in N_3\backslash P$，都有 $d_C^R(u)\leqslant 1$、$d_C^R(v)\leqslant 1$. 除 u_3 或 a_{n-2} 外，C 中无蓝边. 则 $\forall v\in G_2\backslash C$、$d_{C\cap G_1}^R(v)\leqslant 1$、$d_{C\cap G_1}^B(v)\geqslant 1$ 且 $n\geqslant 6$ 时 $N_{C\cap G_1}^B(v)\cap N_{C\cap G_1}^B(P)\cap N_{C\cap G_1}^B(N_3\backslash P)\neq\varnothing$，所以 v 与 $N_1\cup P$ 或 $N_3\backslash P$ 全连红边($|N_1|=1$ 时与 P 或 $N_3\backslash P$ 全连红边). 设 q_1、q_l 与 P 全连红边，与 $N_3\backslash P$ 全连蓝边，q_1q_l 为红边. 此时 N_1 是哈密顿的，N_1 与 P 全连红边，同理产生红色 C_n.

若 $N_3\backslash P=\varnothing$、$N_1\backslash Q=\varnothing$，设 N_1 的红色哈密顿路为 $Q=q_1q_2\cdots q_l$，N_3 的红色哈密顿路为 $P=p_1p_2\cdots p_m$. 若 q_1q_l 为蓝边，p_1、p_m 与 q_1 或 q_l 连红边，不妨设 p_1q_1 为红边，由引理 4 产生红色 C_n. 则 q_1q_l 为红边，N_1 为红团，否则若 N_1 存在蓝边则可找到红色 C_n. $d_{N_1}^R(p_1)=0$. 若 $d_{N_1}^R(p_1)\geqslant 1$，由引理 4，$d_{N_1}^R(p_1)\geqslant 2$ 时 $d_{N_1}^R(p_m)=0$；$d_{N_1}^R(p_1)=1$ 时 $d_{N_1}^R(p_m)\leqslant 1$，$N_{N_1}^R(p_1)\subseteq N_{N_1}^R(p_m)$. $G_1\backslash C$ 为 2 个连通红团设为 R_1、R_3，恰好为 N_1 与 N_3 或 $N_1\cup\{p_1,\cdots,p_i\}$ 与 $N_3\backslash\{p_1,\cdots,p_i\}$，$1\leqslant i\leqslant m-1$. $N_C^R(R_3)=\varnothing$，$|N_C^R(R_1\backslash N_1)|\leqslant 2$，$N_{C\backslash\{a_1\}}^R(N_1)=\varnothing$，因此 C 无蓝边，为避免红色 C_n，$|N_C^R(R_1\backslash N_1)|\leqslant 1$. $\forall v\in G_2\backslash C$，$d_{C\cap G_1}^R(v)\leqslant 1$. $\{v\}\cup\{u_1,u_2\}$ 与 R_1 或 R_3 全连红边产生红色 C_n. 同理 $d_{N_1}^R(p_m)=0$，p_1p_m 为红边，$d_{N_1}^R(p_i)=0$，$i=1,\cdots,m$，N_3 为红团. 同上述证明相同，矛盾.

接下来证明定理 1. 不妨令 $B\neq\varnothing$. 假设 $N_3\backslash P\neq\varnothing$，则 P 与 $N_3\backslash P$ 为红色团且之间全连蓝边. 设 $d_C^R(v_1)\geqslant d_C^R(v_2)\geqslant\cdots\geqslant d_C^R(v_{|P|})$，$\forall v_i\in P$，$d_C^R(u_1)\geqslant d_C^R(u_2)\geqslant\cdots\geqslant d_C^R(u_{|N_3\backslash P|})$，$\forall u_i\in N_3\backslash P$. 若 $d_C^R(v_1)\geqslant 2$，则 $d_C^R(v_i)\leqslant 1$，$i=2,\cdots,|P|$，$N_C^R(v_i)\subseteq N_C^R(v_2)$. 若 $d_C^R(v_1)\leqslant 1$，则 $d_C^R(v_i)\leqslant 1$，$i=2,\cdots,|P|$，$N_C^R(v_i)\subseteq(N_C^R(v_1)\cup N_C^R(v_2))$. 因此 $\forall v_i\in P$，$d_C^B(v_i)\geqslant n-2$，$i=2,\cdots,|P|$. 同理 $\forall u_i\in N_3\backslash P$，$d_C^B(u_i)\geqslant n-2$，$i=2,\cdots,|N_3\backslash P|$. 因此 C 无蓝边，$\forall v\in G_2\backslash C$，有 $d_{C\cap G_1}^R(v)\leqslant 1$，$N_{C\cap G_1}^B(v)\cap N_{C\cap G_1}^B(P)\cap N_{C\cap G_1}^B(N_3\backslash P)\neq\varnothing$. 则 $\{v\}\cup\{u_1,u_2\}$ 与 P 或 $N_3\backslash P$ 全连红边，据鸽巢原理产生红色 C_n. 若 $N_3\backslash P=\varnothing$，$N_3$ 存在红色哈密顿路 $P=p_1p_2\cdots p_m$. N_3 不存在红色 C_{n-1} 与红色 C_n，因为 $B\neq\varnothing$，所以 $n\geqslant 6$ 时，$N_3\geqslant 3n/2-3+1\geqslant n+1$. p_1p_m 为红边时，根据引理 4，N_3 中存在蓝色 K_3，又因为引理 3，G_1 中存在蓝色 K_4. p_1p_m 为蓝边时，根据引理 4，N_3 为连通红团，同理可找到红色 C_n. 矛盾，定理得证.

3 结语与展望

提出了临界 Ramsey 数，推广了经典 Ramsey 数的概念. 在未来的研究中，可以将这个结果推广到 $r_K(C_n,K_m)$，$n\geqslant m\geqslant 3$. 进而可以去考虑在图 K_r 中删掉其他特定图的临界 Ramsey 数.

参考文献：

[1] HOOK J，ISAAK G. Star-critical Ramsey numbers [J]. Discrete Applied Mathematics，2011，159(5)：328.

[2] HOOK J. The classification of critical graphs and star-critical Ramsey numbers [D]. Bethlehem：Lehigh University，2010.

[3] HOOK J. Critical graphs for $R(P_m, P_n)$ and the star-critical Ramsey numbers for paths [J]. Discussiones Mathematicae Graph Theory，2015，35(4)：689.

[4] BURR S A，ERDÖS P. Generalizations of a Ramsey-theoretic result of Chvatal [J]. Journal of Graph Theory，1983，7(1)：39.