文章编号：0253-374X(2019)09-1350-05
DOI：10.11908/j.issn.0253-374x.2019.09.016

半有限 von Neumann 代数上的逼近 2-局部导子

赵兴鹏，方小春，杨　冰
(同济大学 数学科学学院，上海 200092)

摘要：在逼近局部导子和 2-局部导子的基础上，给出了 von Neumann 代数上逼近 2-局部导子的定义. 研究了半有限 von Neumann 代数上的逼近 2-局部导子. 设 $\mathscr{M}$ 是一个 von Neumann 代数，Δ：$\mathscr{M}\to\mathscr{M}$ 是一个逼近 2-局部导子. 证明 Δ 具有齐次性并且满足对于任意的 $x\in\mathscr{M}$ 有 $\Delta(x^2)=\Delta(x)x+x\Delta(x)$. 若 $\mathscr{M}$ 是具有半有限迹 τ 的 von Neumann 代数，给出了 $\mathscr{M}$ 到其自身的逼近 2-局部导子 Δ 具有可加性的一个充分条件，即 Δ 满足 $\Delta(\mathscr{M}_\tau)\subseteq\mathscr{M}_\tau$，其中 $\mathscr{M}_\tau=\{x\in\mathscr{M}:\tau(|x|)<\infty\}$. 从而由 2-torsion free 半素环 R 到 R 自身的 Jordon 导子是一个导子得知，具有半有限迹 τ 的 von Neumann 代数 $\mathscr{M}$ 到其自身的逼近 2-局部导子 Δ 若满足 $\Delta(\mathscr{M}_\tau)\subseteq\mathscr{M}_\tau$，其中 $\mathscr{M}_\tau=\{x\in\mathscr{M}:\tau(|x|)<\infty\}$，则 Δ 是一个导子.

关键词：逼近 2-局部导子；半有限 von Neumann 代数；导子
中图分类号：O153.5　　**文献标志码**：A

Approximately 2-Local Derivations on the Semi-finite von Neumann Algebras

ZHAO Xingpeng, *FANG Xiaochun*, *YANG Bing*
(School of Mathematical Sciences, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: The definition of approximately 2-local derivation on von Neumann algebras is introduced based on the definitions of approximately local derivation and 2-local derivation. Approximately 2-local derivations on semi-finite von Neumann algebras are studied. Let $\mathscr{M}$ be a von Neumann algebra and Δ: $\mathscr{M}\to\mathscr{M}$ be an approximately 2-local derivation. It is easy to obtain that Δ is homogeneous and Δ satisfies $\Delta(x^2)=\Delta(x)x+x\Delta(x)$ for any $x\in\mathscr{M}$. Besides, if $\mathscr{M}$ is a von Neumann algebra with a faithful normal semi-finite trace τ, then a sufficient condition for Δ to be additive is given, that is, $\Delta(\mathscr{M}_\tau)\subseteq\mathscr{M}_\tau$, where $\mathscr{M}_\tau=\{x\in\mathscr{M}:\tau(|x|)<\infty\}$. In all, if Δ is an approximately 2-local derivation on a semi-finite von Neumann algebra with a faithful normal semi-finite trace τ and satisfies $\Delta(\mathscr{M}_\tau)\subseteq\mathscr{M}_\tau$, where $\mathscr{M}_\tau=\{x\in\mathscr{M}:\tau(|x|)<\infty\}$, by the conclusion that the Jordon derivation from a 2-torsion free semi-prime ring to itself is a derivation, it follows that Δ is a derivation.

Key words: approximately 2-local derivation; semi-finite von Neumann algebra; derivation

设 R 是一个结合环. 若 R 中的元素 a 满足 $2a=0$ 可推出 $a=0$，则称 R 是一个 2-torsion free 环. 若 R 中的元素 a 和 b 满足 $aRb=\{0\}$ 可以推出 $a=0$ 或者 $b=0$，则称 R 是一个素环. 若 R 中的元素 a 满足 $aRa=\{0\}$ 可以推出 $a=0$，则称 R 是一个半素环. 设 D：$R\to R$ 是一个线性映射. 若对于 R 中的任意元素 a 满足 $D(a^2)=D(a)a+aD(a)$，则称 D 是一个 Jordon 导子. 如果对于 R 中任意的 2 个元素 a 和 b 成立 $D(ab)=D(a)b+aD(b)$，称 D 是 R 上的一个导子. 设 m 是 R 中的一个固定元素，对任意的 $x\in R$，定义 $D_m(x)=[m, x]$，显然地，D_m 是 R 上的一个导子，此时称 $D_m(x)$ 为 R 上的一个内导子. Kadison[1] 和 Skai[2] 运用不同的方法证明了 von Neumann 代数上的导子是内导子.

1990 年，Kadison[3] 以及 Larson 和 Sourour[4] 提出局部导子的问题. 设 $\mathscr{A}$ 是一个代数，θ 是 $\mathscr{A}$ 上的一个线性映射，若对于 $\mathscr{A}$ 中的任意元 A，存在一个依赖于 A 的导子 θ_A 使得 $\theta(A)=\theta_A(A)$，则称 θ 是 $\mathscr{A}$ 上的一个局部导子. 近年来，很多学者在不同代数上研究讨论了局部导子，并且在不同代数中证明了局部导子就是导子，参见文献[3,5-7]等.

1997 年，Šemrl[8] 引入 2-局部导子的定义. 设 $\mathscr{A}$ 是一个代数，δ 是 $\mathscr{A}$ 上的一个(没有必要线性的)映射. 若对于 $\mathscr{A}$ 中的任意 2 个元素 A 和 B，存在依赖于 A 和 B 的一个导子 $\delta_{A,B}$，使得 $\delta(A)=\delta_{A,B}(A)$ 以及 $\delta(B)=\delta_{A,B}(B)$，则称 δ 是 $\mathscr{A}$ 上的一个 2-局部

收稿日期：2019-01-09
基金项目：国家自然科学基金(11871375)
第一作者：赵兴鹏(1988—)，男，博士生，主要研究方向为算子代数与泛函分析. E-mail：zhaoxingpeng1@sina.com
通信作者：方小春(1968—)，男，教授，博士生导师，理学博士，主要研究方向为算子代数与泛函分析. E-mail：xfang@tongji.edu.cn

导子. Šemrl[8]描述了 $B(H)$上的 2-局部导子,其中 $B(H)$是无限维可分的希尔伯特空间 H 上的有界线性算子构成的集合. 之后,文献[9]给出了有限维希尔伯特空间上的类似描述. 文献[10]描述了定义在有限维除环上的矩阵代数的 2-局部导子. 文献[11]给出了一种新的技巧和研究方法,将文献[8]和[9]推广到了任意的希尔伯特空间 H 上,也就是文献[8]和[9]中的希尔伯特空间可以是任意的,当然也可以不可分,并且证明了 $B(H)$上的 2-局部导子是导子. 文献[12]又给出了另外一种新的技巧方法,再次将文献[8]、[9]以及文献[11]推广到了任意的Ⅰ型 von Neumann 代数上,证明了这些代数上的每个 2-局部导子都是导子. 文献[13]给出了一个类似的结果,证明了有限 von Neumann 代数上的 2-局部导子是导子. 文献[14]证明了半有限 von Neumann 代数上 2-Local 导子是导子.

在局部导子的推动之下,文献[15]引入了巴拿赫代数上的逼近局部导子的定义. 设 $\mathscr{A}$ 是一个巴拿赫代数,$\mathscr{X}$ 是巴拿赫 $\mathscr{A}$-模,称算子 D: $\mathscr{A}\to\mathscr{X}$ 是一个逼近局部导子,若对于 $\mathscr{A}$ 中的任意元素 A,存在一列从 $\mathscr{A}$ 到 $\mathscr{X}$ 的导子$\{D_n^A\}$使得 $D(A)=\lim\limits_{n\to\infty}D_n^A(A)$. 其部分结果见文献[15]. 在 2-局部导子和逼近局部导子的基础之上,文献[16]中自然地定义了 von Neumann 代数 $\mathscr{M}$ 上的逼近 2-局部导子,并证明了有限 von Neumann 代数 $\mathscr{M}$ 上的逼近 2-局部导子是导子. 因此猜想半有限 von Neumann 代数 $\mathscr{M}$ 上的逼近 2-局部导子是不是导子. 如果不是的话,那 von Neumann 代数 $\mathscr{M}$ 和逼近 2-局部导子 Δ 需要满足什么条件逼近 2-局部导子 Δ 才是一个导子. 本文重点研究了半有限 von Neumann 代数 $\mathscr{M}$ 上的逼近 2-局部导子. 设 $\mathscr{M}$ 是一个 von Neumann 代数,Δ: $\mathscr{M}\to\mathscr{M}$ 是一个逼近 2-局部导子. 易证明 Δ 具有齐次性并且满足对于任意的 $x\in\mathscr{M}$ 有 $\Delta(x^2)=\Delta(x)x+x\Delta(x)$. 若 $\mathscr{M}$ 是具有半有限迹 τ 的 von Neumann 代数,给出了 $\mathscr{M}$ 到自身的逼近 2-局部导子 Δ 具有可加性的一个充分条件,即 Δ 满足 $\Delta(\mathscr{M}_\tau)\subseteq\mathscr{M}_\tau$,其中 $\mathscr{M}_\tau=\{x\in\mathscr{M}:\tau(|x|)<\infty\}$. 从而根据文献[17]中已有结论,即 2-torsion free 半素环 R 到 R 自身的 Jordon 导子是一个导子,得到:具有半有限迹 τ 的 von Neumann 代数 $\mathscr{M}$ 到自身的逼近 2-局部导子 Δ 若满足 $\Delta(\mathscr{M}_\tau)\subseteq\mathscr{M}_\tau$,其中 $\mathscr{M}=\{x\in\mathscr{M}:\tau(|x|)<\infty\}$,则 Δ 是一个导子. 该结论显然是文献[14]和文献[16]中主要结果的一个推广.

1　预备知识

以下介绍一些文章中涉及到的基本概念和证明主要结论所用到的一些基本结果.

定义 1[18]　设 $\mathscr{M}$ 是一个 von Neumann 代数.

(1) 映射 τ: $\mathscr{M}_+\to[0,\infty]$称为 $\mathscr{M}$ 上的迹,如果 τ 满足:①对于 $\mathscr{M}_+$ 任意的 2 个元素 x、y 以及任意的 $\lambda>0$,有 $\tau(x+\lambda y)=\tau(x)+\lambda\tau(y)$;②对于 $\mathscr{M}$ 中的任意元素 x,有 $\tau(x^*x)=(xx^*)$.

(2) 迹 τ 称为正规的,如果对 $\mathscr{M}_+$ 中任一有界单增网$\{x_i\}$有 $\sup_i\tau(x_i)=\tau(\sup_i x_i)$;称 τ 为有限的,如果 $\tau(1)<\infty$;称 τ 为半有限的,如果对 $\mathscr{M}_+$ 的任一非零元 x,存在 $\mathscr{M}_+$ 中的一个非零元 y,使得 $y\leqslant x$ 且 $\tau(y)<\infty$;称 τ 为忠实的,如果 $\mathscr{M}_+$ 中的元 x 使得 $\tau(x)=0$ 有 $x=0$.

(3) 如果 τ 是 $\mathscr{M}$ 上的一个正规忠实的半有限迹,称$(\mathscr{M},\tau)$是一个非交换测度空间.

引理 1[18]　设$(\mathscr{M},\tau)$是一个非交换测度空间. 存在 $\mathscr{M}$ 中的一族单调递增的投影$\{e_i\}_{i\in I}$使得对每个 $i\in I$ 有 $\tau(e_i)<\infty$且$\{e_i\}_{i\in I}$按强算子拓扑收敛到 1.

定义 2[18]　令 $\mathscr{S}_+(\mathscr{M})=\{x\in\mathscr{M}_+:\tau(s(x))<\infty\}$,其中 $s(x)$是 x 的支撑,记 $\mathscr{S}(\mathscr{M})$是 $\mathscr{S}_+(\mathscr{M})$中元素的线性组合构成的集合. 称 $\mathscr{S}(\mathscr{M})$中的元为 τ 有限支撑的. 令 $0<p<\infty$且 $x\in\mathscr{S}(\mathscr{M})$,则$|x|^p\in\mathscr{S}(\mathscr{M})$. 定义$\|x\|_p=(\tau(|x|^p))^{1/p}$,相应于$(\mathscr{M},\tau)$的非交换 L_p 空间 $L_p(\mathscr{M},\tau)$定义为$(S,\|\ \|_p)$的完备化. 为了方便起见,令 $L_\infty(\mathscr{M})=\mathscr{M}$,其范数为算子范数,即$\|x\|_\infty=\|x\|$.

引理 2[19]　设 $\mathscr{M}$ 是一个具有半有限迹 τ 的 von Neumann 代数. 记 $\mathscr{M}_\tau=\{x\in\mathscr{M}:\tau(|x|)<\infty\}$. 则 $\mathscr{M}_\tau$ 是一个 $*$-代数且是 $\mathscr{M}$ 的一个双边理想. 显然地,$\mathscr{M}_\tau\subseteq L_1(\mathscr{M})$.

注 1　$\mathscr{M}_\tau$ 定义如上,设 D 是 $\mathscr{M}_\tau$ 上的一个内导子,则 $D(\mathscr{M}_\tau)\subseteq\mathscr{M}_\tau$. 实际上,设 $x\in\mathscr{M}_\tau$,由文献[1]或者文献[2]可知 von Neumann 代数上的导子是内导子,故存在 $a\in\mathscr{M}$ 使得 $D(x)=[a,x]=ax-xa$. 由引理 2 可知,ax,$xa\in\mathscr{M}_\tau$,从而得到 $D(x)\in\mathscr{M}_\tau$.

引理 3[18]　令 $0<r$,p,$q<\infty$使得 $1/r=1/p+1/q$,则$\|xy\|_r\leqslant\|x\|_p\|y\|_q$,其中 $x\in L_p(\mathscr{M})$,$y\in L_q(\mathscr{M})$.

引理 4[18]　令$\{a_i\}$为 $\mathscr{M}$ 中一个有界网且强收敛于 a,则对 $0<p<\infty$和任意的 $x\in L_p(\mathscr{M})$,在 $L_p(\mathscr{M})$

中有 $xa_i \to xa$.

定理 1[17] 设 R 是一个 2-torsion free 半素环，则 Jordon 导子 D: $R \to R$ 是一个导子.

2 主要结果及其证明

目标在于研究半有限 von Neumann 代数上的逼近 2-局部导子是不是导子的问题. 主要结果及其证明主要围绕定理 1[17]展开. 实际上容易证明任意的 von Neumann 代数是 2-torsion free 半素环以及 von Neumann 代数上的 2-局部导子是齐次的且满足:对于任意的 $x \in \mathscr{M}$ 有 $\Delta(x^2)=\Delta(x)x+x\Delta(x)$ 成立，所以对于所研究问题关键需要知道半有限 von Neumann 代数 $\mathscr{M}$ 上的逼近 2-局部导子 Δ 是否具有可加性. 如果不是的话，$\mathscr{M}$ 和 Δ 满足什么条件才能保证 Δ 的可加性.

首先给出 von Neumann 代数上逼近 2-局部导子的定义.

定义 3 给定一个 von Neumann 代数 $\mathscr{M}$，称(不一定是线性)映射 Δ: $\mathscr{M} \to \mathscr{M}$ 是一个逼近 2-局部导子，如果对于任意的 2 个元 x，$y \in \mathscr{M}$，存在一列依赖于 x 和 y 的导子 $\{D_n^{x,y}\}$，使 $\lim\limits_{n\to\infty} D_n^{x,y}(x)=\Delta(x)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} D_n^{x,y}(y)=\Delta(y)$，这里的收敛指的是范数收敛.

引理 5 设 Δ 是 von Neumann 代数 $\mathscr{M}$ 上的逼近 2-局部导子，则 Δ 是齐次的，即对于 $\mathscr{M}$ 中任意元 x 以及 $\lambda \in \mathbb{C}$ 成立 $\Delta(\lambda x)=\lambda\Delta(x)$.

证明 设 $x \in \mathscr{M}$，$\lambda \in \mathbb{C}$. 由于 Δ 是一个逼近 2-局部导子，因此存在一列依赖于 x 和 λx 的导子 $\{D_n^{x,\lambda x}\}$ 使得 $\Delta(x)=\lim\limits_{n\to\infty} D_n^{x,\lambda x}(x)$，$\Delta(\lambda x)=\lim\limits_{n\to\infty} D_n^{x,\lambda x}(\lambda x)$. 从而 $\Delta(\lambda x)=\lim\limits_{n\to\infty} D_n^{x,\lambda x}(\lambda x)=\lambda \cdot \lim\limits_{n\to\infty} D_n^{x,\lambda x}(x)=\lambda\Delta(x)$.

因此，Δ 是齐次的.

引理 6 设 Δ 是 von Neumann 代数 $\mathscr{M}$ 上的逼近 2-局部导子，则对于任意的 $x \in \mathscr{M}$，有 $\Delta(x^2)=\Delta(x)x+x\Delta(x)$ 成立.

证明 对于任意的 $x \in \mathscr{M}$，由于 Δ 是一个逼近 2-局部导子，因此存在一列依赖于 x 和 x^2 的导子 $\{D_n^{x,x^2}\}$ 使得 $\Delta(x)=\lim\limits_{n\to\infty} D_n^{x,x^2}(x)$ 及 $\Delta(x^2)=\lim\limits_{n\to\infty} D_n^{x,x^2}(x^2)$. 从而 $\Delta(x^2)=\lim\limits_{n\to\infty} D_n^{x,x^2}(x^2)=x\lim\limits_{n\to\infty} D_n^{x,x^2}(x)+\lim\limits_{n\to\infty} D_n^{x,x^2}(x)x=x\Delta(x)+\Delta(x)x$. 证毕.

下面给出一个引理，该结果在后面主要引理 8 的证明中起到了很关键的作用.

引理 7 设 Δ 是具有半有限迹 τ 的 von Neumann 代数 $\mathscr{M}$ 上的逼近 2-局部导子，且满足 $\Delta(\mathscr{M}_\tau) \subseteq \mathscr{M}_\tau$，其中 $\mathscr{M}_\tau=\{x \in \mathscr{M}: \tau(|x|)<\infty\}$，则对于任意的 $x \in \mathscr{M}$，$y \in \mathscr{M}_\tau$ 有 $\tau(\Delta(x)y)=-\tau(x\Delta(y))$ 成立.

证明 设 $x \in \mathscr{M}$，$y \in \mathscr{M}_\tau$. 由于 Δ 是 $\mathscr{M}$ 上的逼近 2-局部导子，因此存在一列依赖于 x 和 y 的导子 $\{D_n^{x,y}\}$，使 $\Delta(x)=\lim\limits_{n\to\infty} D_n^{x,y}(x)$ 以及 $\Delta(y)=\lim\limits_{n\to\infty} D_n^{x,y}(y)$.

根据文献[1]或者文献[2]，对于任意的 $n \in \mathbf{N}^+$，$D_n^{x,y}$ 是 $\mathscr{M}$ 上的一个内导子，因此，存在 $m_n \in \mathscr{M}$ 使得

$$[m_n, xy]=D_n^{x,y}(xy)=D_n^{x,y}(x)y+xD_n^{x,y}(y) \tag{1}$$

根据引理 2、注 1 以及条件 $\Delta(\mathscr{M}_\tau) \subseteq \mathscr{M}_\tau$ 易知，$[m_n, xy]$，$D_n^{x,y}(xy)$，$D_n^{x,y}(x)y$，$xD_n^{x,y}(y)$，$\Delta(x)y$，$x\Delta(y) \in \mathscr{M}_\tau$，因此可以对式(1)两边用半有限迹 τ 进行作用，得到

$$0=\tau(D_n^{x,y}(x)y)+\tau(xD_n^{x,y}(y))$$

从而

$$\tau(D_n^{x,y}(x)y)=-\tau(xD_n^{x,y}(y)) \tag{2}$$

接下来分别证明

$$\lim_{n\to\infty} \tau(D_n^{x,y}(x)y)=\tau(\Delta(x)y) \tag{3}$$

以及

$$\lim_{n\to\infty} \tau(xD_n^{x,y}(y))=\tau(x\Delta(y)) \tag{4}$$

首先证明式(3)，实际上

$$|\tau(D_n^{x,y}(x)y)-\tau(\Delta(x)y)|=|\tau((D_n^{x,y}(x)-\Delta(x))y| \tag{5}$$

根据引理 2 中的 $\mathscr{M}_\tau \subseteq L_1(\mathscr{M})$ 以及引理 3 可得

$$|\tau((D_n^{x,y}(x)-\Delta(x))y)| \leqslant \|D_n^{x,y}(x)-\Delta(x)\| \, \|y\|_1 \tag{6}$$

对上式关于 n 取极限，结合逼近 2-局部导子的定义可得不等式(6)右端趋近于零. 综上得到式(3)，即

$$\lim_{n\to\infty} \tau(D_n^{x,y}(x)y)=\tau(\Delta(x)y).$$

下面证明式(4).

由引理 1，存在 $\mathscr{M}$ 中的一族单调递增的投影 $\{e_i\}_{i\in I}$ 使得对每个 $i \in I$ 有 $\tau(e_i)<\infty$ 且 $\{e_i\}_{i\in I}$ 按强算子拓扑收敛到 1. 显然，$\{e_i\}_{i\in I} \subseteq \mathscr{M}_\tau$ 是 $\mathscr{M}$ 中的一个有界网. 此外，由引理 2 可知 $e_ixD_n^{x,y}(y)$，$e_ix\Delta(y) \in \mathscr{M}_\tau$. 因此有

$$|\tau(xD_n^{x,y}(y))-\tau(x\Delta(y))| \leqslant |\tau(xD_n^{x,y}(y))-$$

$$\tau(e_ixD_n^{x,y}(y))\,|+|\,\tau(e_ixD_n^{x,y}(y))-\tau(e_ix\Delta(y))\,|+|\,\tau(e_ix\Delta(y))-\tau(x\Delta(y))\,|$$

接下来对上述不等式右端进行讨论. 由于 $\{e_i\}_{i\in I}$是 $\mathscr{M}$ 中的一个有界网且$\{e_i\}_{i\in I}$按强算子拓扑收敛到 1 以及 $xD_n^{x,y}(y)\in\mathscr{M}_\tau\subseteq L_1(\mathscr{M})$，则根引理 3 以及引理 4，有

$$|\,\tau(xD_n^{x,y}(y))-\tau(e_ixD_n^{x,y}(y))\,|=|\,\tau(xD_n^{x,y}(y)-e_ixD_n^{x,y}(y))\,|\leqslant\tau(|\,xD_n^{x,y}(y)-e_ixD_n^{x,y}(y)\,|)\rightarrow 0 \qquad (7)$$

结合 $e_ix\in\mathscr{M}_\tau\subseteq L_1(\mathscr{M})$，引理 3 以及逼近 2-局部导子的定义，有式(8)成立.

$$|\,\tau(e_ixD_n^{x,y}(y))-\tau(e_ix\Delta(y))\,|\leqslant\|e_ix\|_1\|D_n^{x,y}(y)-\Delta(y)\|\rightarrow 0 \qquad (8)$$

由 $\Delta(\mathscr{M}_\tau)\subseteq\mathscr{M}_\tau$ 可知对于任意的 $y\in\mathscr{M}_\tau$，有 $\Delta(y)\in\mathscr{M}_\tau\subseteq L_1(\mathscr{M})$，根据引理 2 可知 $x\Delta(y)\in\mathscr{M}_\tau\subseteq L_1(\mathscr{M})$. 结合$\{e_i\}_{i\in I}$是 $\mathscr{M}$ 中的一个有界网且$\{e_i\}_{i\in I}$按强算子拓扑收敛到 1，引理 3 以及引理 4 有

$$|\,\tau(e_ix\Delta(y))-\tau(x\Delta(y))\,|\leqslant\tau(|\,e_ix\Delta(y)-x\Delta(y)\,|)\rightarrow 0 \qquad (9)$$

结合式(7)、(8)以及(9)，得到式(4). 从而由式(3)和(4)得到所要证明的结果，即对于任意的 $x\in\mathscr{M}$，$y\in\mathscr{M}_\tau$ 有 $\tau(\Delta(x)y)=-\tau(x\Delta(y))$成立. 证毕.

引理 8　设 Δ 是具有半有限迹 τ 的 von Neumann 代数 $\mathscr{M}$ 上的逼近 2-局部导子，满足 $\Delta(\mathscr{M}_\tau)\subseteq\mathscr{M}_\tau$，其中 $\mathscr{M}_\tau=\{x\in\mathscr{M}:\tau(|x|)<\infty\}$，则 Δ 是一个可加映射，即对于任意的 $x,y\in\mathscr{M}$ 成立 $\Delta(x+y)=\Delta(x)+\Delta(y)$.

证明　根据引理 7，对于任意的 $u,v\in\mathscr{M}$ 以及 $w\in\mathscr{M}_\tau$ 成立，有下式成立：

$$\tau(\Delta(u+v)w)=-\tau((u+v)\Delta(w))=-\tau(u\Delta(w))-\tau(v\Delta(w))=\tau(\Delta(u)w)+\tau(\Delta(v)w)=\tau((\Delta(u)+\Delta(v))w)$$

从而 $\tau((\Delta(u+v)-(\Delta(u)+\Delta(v))w)=0$.

令 $b=\Delta(u+v)-(\Delta(u)+\Delta(v))$，则对于任意的 $w\in\mathscr{M}_\tau$，有 $\tau(bw)=0$. 同样根据引理 1，存在 $\mathscr{M}$ 中的一族单调递增的投影$\{e_i\}_{i\in I}$使得对每个 $i\in I$ 有 $\tau(e_i)<\infty$且$\{e_i\}_{i\in I}$按强算子拓扑收敛到 1. 由引理 2 可知$\{e_ib^*\}_{i\in I}\subset\mathscr{M}_\tau$. 因此，对于任意的 $i\in I$，$\tau(be_ib^*)=0$ 成立. 由于 τ 是正规的，故有$\tau(be_ib^*)$关于 $i\in I$ 单调递增收敛于$\tau(bb^*)$，因此$\tau(bb^*)=0$，结合 τ 的忠实性有 $bb^*=0$，即 $b=0$. 从而得到对于任意的 $u,v\in\mathscr{M}$，有 $\Delta(u+v)=\Delta(u)+\Delta(v)$成立，证得 Δ 在半有限 von Neumann 代数上是可加的. 证毕.

由引理 5、6 以及引理 8，可得到如下结果.

引理 9　设 Δ 是具有半有限迹 τ 的 von Neumann 代数 $\mathscr{M}$ 上的逼近 2-局部导子且满足 $\Delta(\mathscr{M}_\tau)\subseteq\mathscr{M}_\tau$，其中 $\mathscr{M}_\tau=\{x\in\mathscr{M}:\tau(|x|)<\infty\}$，则 Δ 是 $\mathscr{M}$ 上的一个 Jordon 导子.

以下给出最主要的一个结果.

定理 2　设 Δ 是具有半有限迹 τ 的 von Neumann 代数 $\mathscr{M}$ 上的逼近 2-局部导子且满足 $\Delta(\mathscr{M}_\tau)\subseteq\mathscr{M}_\tau$，其中 $\mathscr{M}_\tau=\{x\in\mathscr{M}:\tau(|x|)<\infty\}$，则 Δ 是 $\mathscr{M}$ 上的一个导子.

证明　根据定理 1 以及引理 9，只需要说明 von Neumann 代数 $\mathscr{M}$ 是一个 2-torsion free 半素环即可. 实际上，设 $a\in\mathscr{M}$ 使得 $2a=0$，显然 $a=0$，因此 $\mathscr{M}$ 是一个 2-torsion free 环. 此外，每个 von Neumann 代数都是半素环. 实际上，设 $a\in\mathscr{M}$ 使得 $a\mathscr{M}a=0$，即对于任意的 $x\in\mathscr{M}$ 有 $axa=0$. 不妨取 $x=a^*$，则 $aa^*a=0$. 从而 $a^*aa^*a=0$，进而有 $a=0$. 证毕.

显然有以下推论成立：

推论 1[16]　设 $\mathscr{M}$ 是一个有限 von Neumann 代数，Δ：$\mathscr{M}\rightarrow\mathscr{M}$ 是一个逼近 2-局部导子，则 Δ 是一个导子.

证明　实际上，$\mathscr{M}$ 是一个有限 von Neumann 代数时，根据非交换 L_p 空间的 Hold 不等式，即引理 3 可以直接得到 $\mathscr{M}=\mathscr{M}_\tau$，其中 $\mathscr{M}_\tau=\{x\in\mathscr{M}:\tau(|x|)<\infty\}$. 显然 $\Delta(\mathscr{M}_\tau)\subseteq\mathscr{M}_\tau$，重复定理 2 证明过程，结论显然成立.

推论 2[14]　设 $\mathscr{M}$ 是具有半有限迹 τ 的 von Neumann 代数，Δ：$\mathscr{M}\rightarrow\mathscr{M}$ 是一个 2-局部导子，则 Δ 是一个导子.

证明　定理 2 中前提要求 $\Delta(\mathscr{M}_\tau)\subseteq\mathscr{M}_\tau$，其中 $\mathscr{M}_\tau=\{x\in\mathscr{M}:\tau(|x|)<\infty\}$，是为了得到引理 7 的结果. 实际上，此推论是关于半有限 von Neumann 代数上 2-局部导子的研究，不涉及极限问题. 引理 7 证明过程式(1)中 $D_n^{x,y}(x)$、$D_n^{x,y}(y)$可以分别换成 $\Delta(x)$和 $\Delta(y)$，即可直接得到相应于引理 7 的结果，同样重复定理 2 的证明过程得结论成立.

3　结语

通过翻阅文献，发现只有极少数的作者对逼近映射进行了研究，例如有作者对有限 von Neumann 代数上的逼近 2-局部导子进行了研究. 本文在此基

础上，结合非交换 L_p 空间的相关知识将该作者的结论推广到了半有限 von Neumann 代数上. 因此，根据前面的想法可以考虑将逼近映射推广到一些适当的代数上.

参考文献：

[1] KADISON R V. Derivations of operator algebras [J]. Annals of Mathematics，1996，83(2)：280.

[2] SKAI S. Derivations of w^*-algebras [J]. Annals of Mathematics. 1966，83(2)：273.

[3] KADISON R V. Local derivations [J]. Journal of Algebra，1990，130(2)：494.

[4] LARSON D R，SOUROUR A R. Local derivations and local automorphisms of $B(X)$ [J]. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics，1988，51.

[5] CRIST R L. Local derivations on operator algebras[J]. Journal of Functional Analysis，1996，135(4)：76.

[6] WU J. Local derivations of reflexive algebras[J]. Proceedings of the American Mathematical Society，2001，129(6)：1733.

[7] JOHNSON B E. Local derivations on C^*-algebras are derivations[J]. Transactions of the American Mathematical Society，2000，353(1)：313.

[8] ŠEMRL P. Local automorphisms and derivations on $B(H)$[J]. Proceedings of the American Mathematical Society，1997，125 (9)：2677.

[9] KIM S O，KIM J S. Local automorphisms and derivations on M_n [J]. Proceedings of the American Mathematical Society，2004，132(5)：1389.

[10] LIN Y F，WONG T L. A note on 2-local maps[J]. Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society，Series Ⅱ，2006，49 (3)：701.

[11] AYUPOV S A，KUDAYBERGENOV K K. 2-local derivations and automorphisms on $B(H)$ [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2012，395(1)：5.

[12] AYUPOV S A，ARZIKULOV F. 2-Local derivations on von Neumann algebras of type Ⅰ[EB/OL]. [2019-01-01]. http://www.doc88.com/p-614824588421.html.

[13] AYUPOV S A，KUDAYBERGENOV K K，NURJANOV B O，*et al*. Local and 2-local derivations on non-commutative Arens algebras[J]. Mathematica Slovaca，2014，64(2)：423.

[14] AYUPOV S A，ARZIKULOV F. 2-local derivations on semi-finite von Neumann algebras [J]. Glasgow Mathematical Journal，2013，56(1)：1.

[15] SAMEI E. Approximately local derivations from various classes of Banach algebras [D]. Winnipeg：University of Mnitoba，2005.

[16] TAO F Z，HOU C J，DENG M C. Approximately 2-local derivations on the finite von Neumann algebras [C] // Proceedings of the 2013 International Conference on Advanced Mechatronic Systems. Luoyang：[S. n.]，2013：25-27.

[17] BRESAR M. Jordon derivations on semi-prime rings [J]. Proceedings of the American Mathematical Society，1988，104 (4)：1003.

[18] 徐全华，吐尔德别克，陈泽乾. 算子代数与非交换 L_p 空间引论[M]. 北京：科学出版社，2010.
XU Quanhua，BEKJAN T N，CHEN Zeqian. Introduction to operator algebras and non-commutative L_p spaces [M]. Beijing：The Science Publishing Company，2010.

[19] TAKESAKI M. Theory of operator algebras Ⅰ [M]. New York：Springer-Verlag，1979.