

股票期权信用估值调整的柳树法计算

王光光, 许 威

(同济大学 数学科学学院, 上海 200092)

摘要: 提出了一种基于柳树状结构快速计算带有错向风险的信用估值调整的算法, 并利用信用违约互换价差数据校准违约概率, 以几何布朗运动和跳扩散模型下欧式和百慕大股票期权的数值实验为例, 表明柳树法与现有方法相比有相同的计算精度, 但计算速度更快.

关键词: 期权定价; 柳树法; 信用估值调整; 错向风险

中图分类号: F830.91

文献标志码: A

Efficient Willow Tree Algorithm for Credit Valuation Adjustment of Stock Options

WANG Guangguang, XU Wei

(School of Mathematical Sciences, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: An efficient willow tree algorithm is proposed to price CVA (credit valuation adjustment) with WWR (wrong way risk), which can also calibrate the default probability by credit swap spreads. Besides, some numerical experiments are presented to illustrate the accuracy and efficiency of the proposed method.

Key words: option pricing; willow tree method; credit valuation adjustment (CVA); wrong way risk

随着全球金融衍生品市场的快速发展, 交易对手信用风险(counterparty credit risk, CCR)逐渐成为全球金融机构面临的主要风险之一, 其定义为交易对手未能履行约定契约中的支付义务而造成经济损失的风险. 自 2008 年金融危机之后, 金融衍生品合约的定价考虑 CCR 逐渐成为全球共识. 2010 年出台的巴塞尔协议 III^[1] 则首次增添新的资本计提量, 即信用估值调整(credit valuation adjustment, CVA).

CVA 是度量由于交易对手违约而造成的期望

潜在损失, 定义为无交易对手违约风险的金融衍生品价格与含违约风险的价格之差. 因此, 从定价角度来讲, CVA 的计算即是对 CCR 的风险中性定价^[2], 其主要由 3 部分组成: 贴现期望暴露、交易对手违约概率和违约损失率^[2-3]. 通常的 CVA 计算多数是基于交易对手违约概率与暴露互相独立的假设, 如巴塞尔协议 III 中所给出的 CVA 计算公式^[1]. 然而, 交易对手违约概率与决定金融衍生品价格的市场风险因子之间会存在相关性, 即存在错向风险(wrong way risk, WWR): 暴露越大, 交易对手违约概率越大. 错向风险的存在会增大 CVA, 因此对于 CCR 的定价非常重要.

对于欧式期权, 由于到期日之前无法行权, 若不考虑 WWR, CVA 在几何布朗运动^[4] (geometric Brownian motion, GBM) 和 Merton 跳扩散模型^[5] 下存在解析公式^[2-3]. 但对于百慕大期权, 由于其路径依赖性, CVA 的计算过程将变得非常复杂. 目前, 多数文献中 CVA 是通过基于模拟的方法来计算. Breton 等^[6] 在 GBM 和跳扩散模型^[5] 下提出了一种基于函数插值的动态规划方法, 对高斯 Copula^[3] 和 Hull-White 强度模型^[7] 两种 WWR 模型下的百慕大期权进行了定价研究. 但该方法仅适用于低维标的模型, 同时对 Hull-White 模型也无法做到拟合市场上信用违约互换价差数据. 之后, Bavier 等^[8] 基于 Hull-White 强度模型, 首先利用二叉树方法将违约强度通过价差数据校准得到, 然后通过蒙特卡洛模拟研究了 GBM 下百慕大期权的提前行权特性对于 CVA 的影响. Graaf 等^[9] 在随机波动率模型^[10] 下提出了基于蒙特卡洛模拟的 SGBM (stochastic grid bundling method) 方法用于定价百慕大期权下无 WWR 的 CVA. Feng 等^[11] 利用同样方法研究了包含 WWR 的百慕大期权下的 CVA 计算, 但其中 WWR 是由额外的随机过程进行刻画,

收稿日期: 2019-02-28

基金项目: 国家自然科学基金面上项目(71771175)

第一作者: 王光光(1991—), 男, 博士生, 主要研究方向为金融数学. E-mail: 1410547@tongji.edu.cn

通信作者: 许 威(1978—), 男, 副教授, 博士生导师, 理学博士, 主要研究方向为金融数学. E-mail: wdxu@tongji.edu.cn

形式较为复杂. 近年来, 国内学者对于交易对手违约风险也有研究, 如蒋昇^[12]基于 Copula 函数利用复杂的嵌套蒙特卡洛模拟对交易对手风险进行了实证分析; 奚扬阳^[13]计算了欧式期权下的 CVA. 更多关于 CVA 和 WWR 模型的内容可参见文献[3].

本文基于以上现有方法的诸多限制, 首次提出了一种基于柳树树状结构能应用于各种标的资产模型并且快速有效计算带有 Hull-White-WWR 的 CVA 的数值算法. 该方法主要包括两部分. 第一部分, 柳树法在无 WWR 时计算 CVA. 此时假设违约概率分布是确定的, 根据文献[2-3], 对于欧式期权, 计算 CVA 等价于计算欧式期权在零时刻的价格, 则根据文献[14]柳树法可快速求得欧式期权价格从而直接求得 CVA. 而对于百慕大期权, 假设交易对手在期权所有可行权时间节点均可能发生违约, 则根据文献[9]中关于百慕大期权下暴露的定义: 期权行权, 暴露为零; 期权持有, 暴露等于该时刻的持有价值. 因此无 WWR 下 CVA 的计算是一个路径依赖的过程, 需要用柳树法倒向归纳计算期权在所有可行权时刻的持有价值, 并判断是否行权, 以确定当前时刻的贴现期望暴露. 第二部分, 柳树法在 Hull-White 模型刻画 WWR 时计算有错向风险的 CVA, 此时与无 WWR 区别在于违约概率分布需要用市场上信用违约互换价差数据校准得到. 柳树法基于 Bavier^[8]的思想, 通过自身柳树结构在给定价差数据时精确校准 Hull-White 模型中的时间依赖函数 $a(t)$, 从而得到新的违约概率分布, 用于最后计算有 WWR 的 CVA.

本文基于柳树法计算错向风险下欧式和百慕大期权的 CVA, 主要贡献体现在以下几方面: 第一, 以树状结构计算 CVA 在现有文献中尚属首次; 第二, 所提出的柳树法计算 CVA 的算法不依赖于标的资产模型, 容易从常见的 GBM^[4]、Merton 跳扩散模型^[5]扩展到更复杂的随机波动率^[10]或 Lévy 过程^[15]等, 适用范围更广; 第三, 柳树法基于 Hull-White 模型刻画 WWR 能拟合市场上信用互换价差数据, 实用性更强; 第四, 柳树法在欧式和百慕大期权的 CVA 计算中计算效率高, 存储空间较少, 维护成本更低.

1 无错向风险的 CVA 计算

考虑一份权益类衍生品合约, 如欧式和百慕大期权, 到期日为 T , 其 CVA 定义如下^[3]:

$$CVA = (1 - R) E[1_{\{0 < \tau < T\}} B^r E^r] = (1 - R) \int_0^T E[B^r E^r | \tau = t] P_D(dt) \quad (1)$$

式中: $E[\cdot]$ 代表风险中性测度下的期望; τ 为交易对手违约时间; R 为回收率, $1 - R$ 即违约损失率; B^r 为 t 时刻的贴现因子, 在无风险利率 r 为常数假设下, $B^r = e^{-rt}$; $1_{\{\cdot\}}$ 为示性函数; E^r 代表 t 时刻的暴露, 非负; $P_D(dt)$ 代表交易对手在时段 $[t, t + dt]$ 内违约的风险中性概率 (假设时刻 t 之前没有违约).

式(1)是 CVA 一般化的表达式, 没有对风险暴露和交易对手违约概率之间的相关性做任何的假设. 事实上, 业界普遍采用二者是互相独立的假设, 从而得到以下简化的 CVA 表达式:

$$CVA = (1 - R) \int_0^T B^r E_E^r P_D(dt) \quad (2)$$

其中: $E_E^r = E[E^r]$, 代表 t 时刻暴露的期望, 称之为期望暴露. 根据文献[3], 准确计算 CVA 的 3 要素 (回收率、贴现期望暴露和违约概率).

一般来讲, 式(2)中积分表达式不具有显式解, 需要借助于数值积分近似求解. 首先, 不失一般性, 将区间 $[0, T]$ 等分为 $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$, 等分间隔 $\Delta t = T/N$, 然后确定 $\{t_n\}_{n=1}^N$ 时刻的期望暴露 $E_E^r \stackrel{\text{def}}{=} E_E^r$, 最后用违约概率加权求和计算 CVA. 若利用矩形公式计算数值积分, 式(2)近似求解如下:

$$CVA = (1 - R) \sum_{n=1}^N B^n E_E^n P_D^n \quad (3)$$

式中: $B^n = e^{-rt_n}$, P_D^n 是 $[t_{n-1}, t_n]$ 内违约的概率. 特别地, 巴塞尔协议 III 利用梯形公式计算数值积分^[1], 即

$$CVA = (1 - R) \sum_{n=1}^N \frac{B^n E_E^n + B^{n-1} E_E^{n-1}}{2} P_D^n = \frac{1}{2} \left[(1 - R) \sum_{n=1}^N B^n E_E^n P_D^n + (1 - R) \sum_{n=1}^N B^{n-1} E_E^{n-1} P_D^n \right]$$

因此, 巴塞尔协议要求的 CVA 可通过计算式(3)间接得到. 假设交易对手违约时刻的概率分布具有如下形式^[6-8]:

$$P_D(t) = 1 - \exp(-\lambda t) \quad (4)$$

其中违约强度参数 λ 通常由市场上的信用违约互换价差数据进行估计^[3], 如假设违约互换期限结构恒为常数^[6,8], 则 $\lambda = \theta / (1 - R)$, 其中 θ 为信用违约互换价差. 从而, 由式(3)可知, 计算 CVA 的核心是计算期望暴露 E_E^n .

1.1 柳树法期权定价

柳树法通过构造离散的马尔科夫过程来刻画布

朗运动,能处理各种标的资产模型,如 GBM^[4,14]、Merton 跳扩散模型^[5,16]、随机波动率模型^[10]以及 Lévy 过程^[15-16]等等,现已经被广泛用于各种期权的定价^[14,16-17]. 图 1 展示了一个柳树结构的简单示意图. 该柳树结构从初始时刻 0 到 T , 有 5 个离散的时刻,从第 2 个时刻起,每个时刻都有 5 个可能的资产价格节点. 因此,柳树法的一个优点在于每个离散时刻上的资产价格节点个数是常数,从而总的节点个数随时间步长 N 呈线性增长.

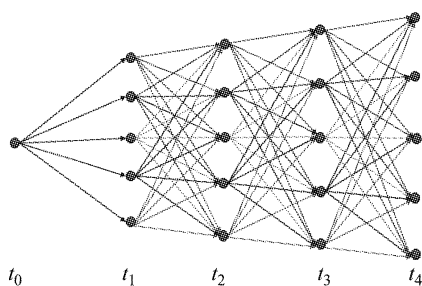


图 1 包含 5 个时刻、5 个资产价格节点的柳树结构图

Fig.1 Graphical depiction of willow tree lattice with 5 space nodes and 5 time nodes

根据图 1 和文献[14,16-17]可知,给定资产价格模型,如本文采用的 GBM 和 Merton 跳扩散模型,记 S^0 为零时刻资产价格, S_i^n 为 t_n 时刻第 i 个节点上可能的价格, $\mathbf{P}^n = [p_{ij}^n]^{m \times m}$ 为相邻时刻 $[t_n, t_{n+1}]$ 之间状态转移概率矩阵,其中 p_{ij}^n 代表从 S_i^n 转移到 S_j^{n+1} 的转移概率, $n=1, \dots, N-1$; $i, j=1, 2, \dots, m$, 其中 m 为柳树在每一时刻可能的资产价格节点个数, V_i^n 为期权在 t_n 时刻第 i 个节点上的价格. 则根据倒向归纳法,柳树法百慕大期权定价框架可写为

$$V_i^n = \begin{cases} \varphi(S_i^n), & n = N \\ \max[c_i^n, \varphi(S_i^n)], & n = N-1, \dots, 1 \\ c^0, & n = 0 \end{cases} \quad (5)$$

式中: $\varphi(S_i^n) = \max(\delta(S_i^n - K), 0)$; 参数 δ 为 1(或 -1)代表看涨(或看跌); K 为敲定价格; c_i^n 为期权在 t_n 时刻第 i 个节点上的持有价值. 由柳树法倒向归纳计算如下:

$$c_i^n = e^{-r\Delta t} \sum_{j=1}^m p_{ij}^n V_j^{n+1}$$

1.2 欧式期权的 E_E^n

考虑欧式期权,由于其只在到期日 T 时刻有现金流,在无 WWR 情况下,任意时刻期权期望暴露 E_E^n 等于该时刻期权价格^[2]. 此时式(2)中的 CVA 简化为^[2-3]

$$\text{CVA} = (1 - R)E_E^0 P_D(T) \quad (6)$$

式中: E_E^0 为欧式期权在零时刻的价格,即 $E_E^0 = V^0$;

$P_D(T)$ 为到期日 T 之前违约概率.

则由式(6)可知,柳树法计算无 WWR 时欧式期权的 CVA 等价于定价欧式期权.

1.3 百慕大期权的 E_E^n

考虑一份百慕大期权,在任意行权时刻,根据文献[9]中百慕大期权暴露的定义:期权行权,暴露为 0;期权持有,暴露等于持有价值. 因此,对于柳树法每一节点上的暴露 E_i^n ,有

$$E_i^n = \begin{cases} 0, & \text{期权在 } S_i^n \text{ 行权} \\ c_i^n, & \text{期权在 } S_i^n \text{ 继续持有} \end{cases} \quad n = 1, \dots, N-1$$

式中: c_i^n 代表 t_n 时刻期权在第 i 个节点上的持有价值,边界条件为 $E^0 = c^0$, $E_i^N = 0$, $i=1, 2, \dots, m$. 由于 $E_E^n = E[E^n]$,如何基于柳树法计算 E_E^n 是计算百慕大期权 CVA 的关键.

给定柳树结构上 t_n 时刻某个资产价格节点 S_i^n ,当期行权时,因为合约已经终止,未来不再存在暴露,则该点暴露为 0,因此,该点转移到 t_{n+1} 时刻所有状态的转移概率均为 0,即 $p_{ij}^n = 0, j=1, 2, \dots, m$;若未行权,则转移概率保持不变. 记新的转移概率 \tilde{p}_{ij}^n 为

$$\tilde{p}_{ij}^n = \begin{cases} 0, & \text{期权在 } S_i^n \text{ 行权} \\ p_{ij}^n, & \text{期权在 } S_i^n \text{ 继续持有} \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots, m$$

则 t_n 时刻,相应的转移概率矩阵 \mathbf{P}^n 被调整为 $\tilde{\mathbf{P}}^n = [\tilde{p}_{ij}^n]^{m \times m}$. 由此,柳树法可迭代计算期望暴露,即在

t_n 时刻,计算数学期望 $E_E^n = \mathbf{q}^n \mathbf{E}^n$,其中 $\mathbf{q}^n = \mathbf{q} \prod_{k=1}^{n-1} \tilde{\mathbf{P}}^k$, $\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_m]$,代表柳树从 S^0 转移到暴露 \mathbf{E}^n 的转移概率向量,暴露向量 $\mathbf{E}^n = [E_1^n, E_2^n, \dots, E_m^n]^T$,其中 E_i^n 代表 t_n 时刻柳树上第 i 个节点上的暴露, $i=1, 2, \dots, m$. 在 t_{n+1} 时刻,更新概率向量 $\mathbf{q}^{n+1} = \mathbf{q}^n \tilde{\mathbf{P}}^n$,则 t_{n+1} 时刻期望暴露为

$$E_E^{n+1} = \mathbf{q}^{n+1} \mathbf{E}^{n+1} \quad (7)$$

2 有错向风险的 CVA 计算

错向风险是描述暴露与交易对手违约概率之间的正相关性,即违约概率随着交易对手暴露的增加而增加. 在柳树框架下主要考虑 Hull-White 强度模型对于 CVA 计算的影响. 此时由于违约概率与暴露的相关性, CVA 无法再通过式(2)和(3)简化计算.

Hull-White 强度模型是指:假设式(4)违约强度是一个关于时间 t 和 t 时刻无违约风险下期权价格 V 的函数,记为 $\lambda(t)$,即

$$\lambda(t) = \exp(a(t) + bV^t) \quad (8)$$

式中: V^t 是 t 时刻对应的期权价格, 如后续数值试验中欧式或百慕大看跌期权的价格; $b \in \mathcal{R}^+$ 是 WWR 参数; $a(t)$ 是标准化函数.

当 WWR 由式(8)刻画时, 结合式(2)和式(3), Hull-White 模型下的 CVA 的计算表达式修正为^[7-8]

$$CVA = (1-R) \sum_{n=1}^N B^n E[E^n P_D^n] \quad (9)$$

式中: P_D^n 代表此模型下 $[t_{n-1}, t_n]$ 内违约概率. 时间依赖函数 $a(t)$ 通常在给定参数 b 后由市场上信用违约互换价差数据在所有时间节点 $\{t_n\}_{n=1}^N$ 校准确定, 从而形成以下校准问题:

$$\exp\left(-\frac{\theta}{1-R}t_n\right) = E\left[\exp\left(-\int_0^{t_n} \lambda(t)dt\right)\right] \quad (10)$$

问题(10)是一个路径依赖的复杂问题^[8]. 由式(8), 对于任意区间 $[t_{n-1}, t_n]$, $n=1, 2, \dots, N$, 定义过程 η^n 满足 $\eta^n \stackrel{\text{def}}{=} \exp\left(-\lambda^n \Delta t + \frac{\theta}{1-R} \Delta t\right)$, 其中 $\lambda^n \triangleq \lambda(t_n)$, 是一个随机变量. 同时, 式(10)可进一步写为

$$\exp\left(-\frac{\theta}{1-R}n\Delta t\right) = E\left[\exp\left(-\sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \lambda(t)dt\right)\right] = E\left[\exp\left(-\sum_{k=1}^n \lambda^n \Delta t\right)\right] \quad (11)$$

若令式(11)等号两端同时除以左端项, 则成立

$$1 = E\left[\prod_{k=1}^n \exp\left(-\lambda^k \Delta t + \frac{\theta}{1-R} \Delta t\right)\right] = E\left[\prod_{k=1}^n \eta^k\right] \quad (12)$$

基于式(12), 本文有以下定理, 用于迭代校准 $a(t)$.

定理 1 在柳树法定价期权框架(5)下, 给定转移概率矩阵 $\mathbf{P}^n = [p_{ij}^n]^{m \times m}$, 期权价格 V_i^n , $\forall i, j=1, 2, \dots, m; n=1, 2, \dots, N$, 信用违约互换价差 θ , 回收率 R 和参数 b , 校准问题(10)等价于: 对时间节点 $n=1, 2, \dots, N$, 柳树节点 $i=1, 2, \dots, m$, 成立

$$\sum_{i=1}^m w_i^n \eta_i^n = 1 \quad (13)$$

式中: $\eta_i^n = \exp\left(-\lambda_i^n \Delta t + \frac{\theta}{1-R} \Delta t\right)$, 系数 w_i^n 表示概率, 由下式迭代给出:

$$w_i^n = \begin{cases} q_i, & n=1 \\ \sum_{j=1}^m p_{ji}^{n-1} \eta_j^{n-1} w_j^{n-1}, & n>1 \end{cases}$$

证明 首先, 当 $n=1$ 时, 即对于区间 $[t_0, t_1]$, 由式(12)数学期望可知

$$\sum_{i=1}^m q_i \eta_i^1 = E[\eta^1] = 1$$

令 $w_i^1 \triangleq q_i$, 则定理成立. 当 $n>1$ 时, 一方面, 计算

$\sum_{i=1}^m w_i^n \eta_i^n$ 如下:

$$\sum_{i=1}^m w_i^n \eta_i^n = \sum_{i=1}^m \eta_i^n \left[\sum_{j_{n-1}=1}^m p_{j_{n-1}i}^{n-1} \eta_{j_{n-1}}^{n-1} w_{j_{n-1}}^{n-1} \right] = \sum_{i=1}^m \eta_i^n \left[\sum_{j_{n-1}=1}^m p_{j_{n-1}i}^{n-1} \eta_{j_{n-1}}^{n-1} \left[\sum_{j_{n-2}=1}^m p_{j_{n-2}j_{n-1}}^{n-2} \eta_{j_{n-2}}^{n-2} w_{j_{n-2}}^{n-2} \right] \right]$$

以此类推, 通过连续代入 $w_{j_{n-2}}^{n-2}$ 直至 $w_{j_1}^1$ 可得

$$\sum_{i=1}^m w_i^n \eta_i^n = \sum_{i=1}^m \eta_i^n \left[\sum_{j_{n-1}=1}^m p_{j_{n-1}i}^{n-1} \eta_{j_{n-1}}^{n-1} \cdots \left[\sum_{j_1=1}^m p_{j_1j_2}^1 \eta_{j_1}^1 w_{j_1}^1 \right] \right] \quad (14)$$

另一方面, 在柳树结构下, $\prod_{k=1}^n \eta^k$ 可写成离散形式

$\prod_{k=1}^n \eta_{j_k}^k$, $\forall j_k=1, 2, \dots, m$, 在柳树结构下对应的转移概率为 $q_{j_1} \prod_{k=1}^{n-1} p_{j_kj_{k+1}}^k$. 因此成立

$$E\left[\prod_{k=1}^n \eta^k\right] = \sum_{j_n=1}^m \cdots \sum_{j_1=1}^m \left(\prod_{k=1}^n \eta_{j_k}^k \right) (q_{j_1} \prod_{k=1}^{n-1} p_{j_kj_{k+1}}^k) = \sum_{j_n=1}^m \eta_{j_n}^n \left[\sum_{j_{n-1}=1}^m p_{j_{n-1}j_n}^{n-1} \eta_{j_{n-1}}^{n-1} \cdots \left[\sum_{j_1=1}^m p_{j_1j_2}^1 \eta_{j_1}^1 q_{j_1} \right] \right]$$

由于当 $n=1$ 时, $w_{j_1}^1 \triangleq q_{j_1}$, $\forall j_1=1, 2, \dots, m$, 则结合式(14), 可以得到

$$\sum_{i=1}^m w_i^n \eta_i^n = E\left[\prod_{k=1}^n \eta^k\right]$$

从而由式(12)可以得到 $\sum_{i=1}^m w_i^n \eta_i^n = 1$, 即定理式(13)得证. 最后, 由 w_i^n 定义可知 $w_i^n > 0$, $\forall i=1, 2, \dots, m$, 对 $n=1$, 成立

$$\sum_{i=1}^m w_i^1 = \sum_{i=1}^m q_i = 1$$

对 $n>1$, 成立

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m w_i^n &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m p_{ji}^{n-1} \eta_j^{n-1} w_j^{n-1} = \\ &= \sum_{j=1}^m \eta_j^{n-1} w_j^{n-1} \left[\sum_{i=1}^m p_{ji}^{n-1} \right] = \\ &= \sum_{j=1}^m \eta_j^{n-1} w_j^{n-1} = 1 \end{aligned}$$

这是因为, 一方面柳树结构中转移概率矩阵每行的和等于 1, 即 $\sum_{i=1}^m p_{ji}^{n-1} = 1$, $\forall j=1, 2, \dots, m$ 成立; 另

一方面, $\sum_{j=1}^m \eta_j^{-1} w_j^{-1} = 1$ 已经证明成立, 从而说明 $\{w_i^n\}$ 是概率, 定理证毕.

综上, 本文通过柳树结构迭代计算 $a(t)$, 避免了 Hull 和 White^[7] 所给算法的路径依赖性. 因此, 该 WWR 模型一旦在给定参数 b 下, 由算法 1 校准得到一系列 a^n 后, 则对于 t_n 时刻柳树节点 $i=1, 2, \dots, m$ 处暴露对应的 $[t_{n-1}, t_n]$ 内违约概率 P_{Di}^n 可写作

$$P_{Di}^n = 1 - \exp(-\exp(a^n + bV_i^n)\Delta t) \quad (15)$$

式中: V_i^n 为该点期权价格. 式(15)说明 t_n 时刻柳树上每一节点暴露对应的违约概率是不同的, 因此, 由无 WWR 下期望暴露的计算公式(7)可知, 式(9)中含有 WWR 的期望暴露可计算为

$$E[E^n P_D^n] = q^n(E^n \cdot * P_D^n)$$

其中暴露向量 E^n 与无 WWR 时一致, 而违约概率 $P_D^n = [P_{D1}^n, P_{D2}^n, \dots, P_{Dm}^n]^T$, 由式(15)给出. 从而 Hull-White 错向风险模型下柳树法计算 CVA 如下:

$$CVA = (1 - R) \sum_{n=1}^N B^n [q^n(E^n \cdot * P_D^n)]$$

3 CVA 数值实验

基于不同标的资产模型, 以 GBM 和 Merton 跳扩散模型为例, 其他资产模型同理, 对 Hull-White 错向风险模型中不同参数下的 CVA 进行定价分析, 同时以欧式和百慕大看跌期权为产品(看涨期权同理), 比较柳树法与解析公式或蒙特卡洛模拟方法的数值结果. 所有数值实验的程序均在操作系统为 64 位 Windows 10 家庭版的计算机上运行, 内存为 8 GB, 处理器为 Intel(R) Core(TM) i7-6700U CPU @2.80 GHz, 使用的软件版本为 Matlab R2018a.

实验中, 对于 GBM, 柳树法中资产价格节点个数 $m=30$; 对于复杂的 Merto 跳扩散模型, $m=50$. 离散时间步数 $N=100$, 蒙特卡洛方法的模拟路径数为 5×10^4 . 回收率 $R=0.4$. 实验比较了不同的股票价格 S^0 , 不同的信用互换价差 θ 下柳树法和蒙特卡洛方法的表现. 记号 WT 代表柳树法, MC 代表蒙特卡洛模拟, 以运行 10 次求平均值作为参考值, s. d. 代表蒙特卡洛的标准差, B-S-M-J 分别代表由 Gregory^[3]列出的在 GBM 和 Merton 跳扩散模型下无 WWR 的欧式期权的 CVA 解析公式.

首先, 考虑 GBM, 固定欧式和百慕大期权的敲定价格 $K=100$, 利率 $r=0.05$, 波动率 $\sigma=0.1$, 到

期日 $T=1$. 然后选取了不同的价格 S^0 和不同的信用价差 θ , 从表 1 可以看出, 在无 WWR 时, 对于欧式期权, 柳树法的定价结果与文献[3]解析公式非常接近; 而对于百慕大期权, 柳树法数值结果与文献常用的最小二乘蒙特卡洛结果相近, 相对误差均低于 1%, 其中蒙特卡洛的标准差至少为 10^{-3} 量级. 这充分说明了柳树法的准确性. 从计算时间上来看, 在给定资产价格节点个数 m 和时间节点个数 N 时, 其他参数的变化并没有影响柳树法的计算时间, 但是, 柳树法的计算时间则少于蒙特卡洛方法.

接下来, 讨论错向风险对于 CVA 计算的影响, 其中 Hull-White 模型参数 b 以文献[6,8]中 $b=0.01$ 为参考. 从表 2 可以看出, 柳树法在欧式期权和百慕大期权下定价 CVA 的数值结果与蒙特卡洛模拟相比均十分接近, 同样, 柳树法在计算时间上均具有明显优势.

其次, 从 GBM 扩展到带跳跃的 Merton 跳扩散模型. 欧式和百慕大期权的敲定价格 $K=100$, 利率 $r=0.05$, 波动率 $\sigma=0.1$, 到期日 $T=1$, 跳跃强度为 0.1, 跳跃幅度满足对数正态分布, 均值为 -0.05, 标准差为 0.05^[16]. 从表 3 可以看出, 选取不同的 S^0 和不同的信用价差 θ , 柳树法在欧式和百慕大期权下的无 WWR 的 CVA 数值结果与蒙特卡洛相比十分接近, 其中蒙特卡洛标准差至少为 10^{-3} 量级, 同时在计算时间上有一定优势. 这说明柳树法在复杂的资产模型下同样表现优秀. 进一步, 将 Hull-White 错向风险模型应用到 Merton 跳扩散模型. 从表 4 可以看出, 柳树法在欧式和百慕大期权下的 CVA 计算与蒙特卡洛相比十分接近, 其中蒙特卡洛标准差同样至少为 10^{-3} 量级, 但柳树法在计算时间上有优势.

最后, 考虑 CVA 在两种期权同样参数下以及有无 WWR 下的数值比较. 一方面, 从表 1 到表 4, 可以看出, 欧式期权下的 CVA 与百慕大期权下的 CVA 在数值上明显不同, 并且欧式期权下的 CVA 数值较大, 这是因为百慕大期权给与期权持有者更多主动行使期权的机会, 从而降低了持有者将来时刻的暴露, 降低了 CVA. 另一方面, 考虑 WWR 的 Hull-White 模型下的 CVA 比无 WWR 下的 CVA 数值要大. 通过计算, 其比值介于 1.02~1.40 之间, 这与巴塞尔协议 III^[1]中 WWR 系数所在区间 [1.2, 1.4] 较为吻合, 也证实了错向风险会增大 CVA 的结论.

表 1 不同 S^0 、 θ 下, 柳树法和蒙特卡洛在 GBM 下定价欧式和百慕大期权下无 WWR 的 CVA 的结果
 Tab.1 Results of willow tree method and Monte Carlo method at different values of S^0 and θ in GBM without WWR

S^0	θ	欧式期权				百慕大期权			
		CVA/元		时间/s		CVA/元		时间/s	
		WT	B-S	WT	B-S	WT	MC (s. d.)	WT	MC
95	0.05	0.184 5	0.184 8	0.00	0.00	0.041 7	0.041 7 (1.18×10^{-3})	0.13	2.50
	0.10	0.354 2	0.354 8	0.00	0.00	0.081 9	0.082 8 (1.38×10^{-3})	0.13	2.81
	0.15	0.510 4	0.511 3	0.00	0.00	0.120 9	0.121 4 (3.23×10^{-3})	0.14	3.14
100	0.05	0.092 2	0.092 5	0.00	0.00	0.051 0	0.051 4 (4.49×10^{-4})	0.13	2.64
	0.10	0.177 1	0.177 6	0.00	0.00	0.099 7	0.099 5 (9.75×10^{-4})	0.17	2.89
	0.15	0.255 1	0.255 9	0.00	0.00	0.146 1	0.145 9 (6.80×10^{-4})	0.13	2.44
105	0.05	0.040 8	0.040 8	0.00	0.00	0.029 7	0.029 4 (1.74×10^{-4})	0.13	1.88
	0.10	0.078 4	0.078 4	0.00	0.00	0.057 8	0.057 4 (2.74×10^{-4})	0.13	2.17
	0.15	0.112 9	0.112 9	0.00	0.00	0.084 3	0.084 4 (1.23×10^{-4})	0.13	2.61

表 2 不同 S_0 、 θ 下, 柳树法和蒙特卡洛在 GBM 下定价欧式和百慕大期权下有 WWR 的 CVA 的结果
 Tab.2 Results of willow tree method and Monte Carlo method at different values of S^0 and θ in GBM with WWR

S^0	θ	欧式期权				百慕大期权			
		CVA/元		时间/s		CVA/元		时间/s	
		WT	MC (s. d.)	WT	MC	WT	MC (s. d.)	WT	MC
95	0.05	0.317 1	0.318 0 (1.59×10^{-3})	0.03	0.30	0.041 3	0.041 5 (2.05×10^{-3})	0.13	3.41
	0.10	0.607 1	0.608 1 (3.05×10^{-3})	0.03	0.30	0.082 5	0.082 3 (3.54×10^{-3})	0.13	3.28
	0.15	0.872 3	0.874 5 (4.35×10^{-3})	0.03	0.31	0.123 7	0.123 8 (2.38×10^{-3})	0.13	3.03
100	0.05	0.179 6	0.180 7 (1.24×10^{-3})	0.03	0.30	0.052 1	0.052 7 (7.72×10^{-4})	0.13	3.23
	0.10	0.343 8	0.344 3 (2.38×10^{-3})	0.03	0.30	0.104 2	0.104 7 (6.73×10^{-4})	0.13	2.97
	0.15	0.493 9	0.496 1 (3.43×10^{-3})	0.03	0.31	0.156 3	0.156 1 (1.83×10^{-3})	0.13	3.00
105	0.05	0.090 2	0.090 5 (8.79×10^{-4})	0.03	0.31	0.030 8	0.030 9 (4.74×10^{-4})	0.13	2.75
	0.10	0.172 6	0.172 9 (1.70×10^{-3})	0.03	0.34	0.061 5	0.061 3 (5.73×10^{-4})	0.13	2.53
	0.15	0.247 9	0.249 2 (2.41×10^{-3})	0.03	0.31	0.092 2	0.091 6 (1.24×10^{-3})	0.13	2.94

表 3 不同 S^0 、 θ 下, 柳树法和蒙特卡洛在跳扩散模型下定价欧式和百慕大期权下无 WWR 的 CVA 的结果

Tab.3 Results of willow tree method and Monte Carlo method at different values of S^0 and θ in jump-diffusion model without WWR

S^0	θ	欧式期权				百慕大期权			
		CVA/元		时间/s		CVA/元		时间/s	
		WT	M-J	WT	M-J	WT	MC (s. d.)	WT	MC
95	0.05	0.187 4	0.187 2	0.13	0.02	0.045 3	0.045 2 (1.07×10^{-4})	0.89	3.84
	0.10	0.359 7	0.359 5	0.16	0.02	0.089 0	0.088 7 (1.94×10^{-3})	0.87	3.56
	0.15	0.518 3	0.517 9	0.13	0.01	0.131 3	0.131 0 (2.65×10^{-3})	0.73	3.84
100	0.05	0.095 0	0.094 9	0.08	0.02	0.052 9	0.053 1 (4.25×10^{-4})	0.87	4.27
	0.10	0.182 3	0.182 1	0.13	0.01	0.103 3	0.103 7 (1.44×10^{-3})	0.83	3.52
	0.15	0.262 7	0.262 4	0.06	0.01	0.155 0	0.153 5 (1.73×10^{-3})	0.80	3.56
105	0.05	0.042 8	0.042 7	0.08	0.02	0.040 4	0.040 5 (5.57×10^{-4})	0.73	3.66
	0.10	0.082 2	0.082 0	0.06	0.02	0.060 7	0.060 3 (6.31×10^{-4})	0.86	3.38
	0.15	0.118 4	0.118 2	0.13	0.02	0.088 5	0.087 5 (1.05×10^{-3})	0.78	3.47

表 4 不同 S^0 、 θ 下, 柳树法和蒙特卡洛在跳扩散模型下定价欧式和百慕大期权下有 WWR 的 CVA 的结果

Tab.4 Results of willow tree method and Monte Carlo method at different values of S^0 and θ in jump-diffusion model with WWR

S^0	θ	欧式期权				百慕大期权			
		CVA/元		时间/s		CVA/元		时间/s	
		WT	MC (s. d.)	WT	MC	WT	MC (s. d.)	WT	MC
95	0.05	0.198 5	0.197 8 (1.49×10^{-3})	0.02	0.55	0.044 9	0.045 0 (8.09×10^{-4})	1.27	4.56
	0.10	0.383 9	0.380 6 (2.37×10^{-3})	0.03	0.50	0.089 8	0.089 6 (2.39×10^{-3})	1.78	4.92
	0.15	0.553 4	0.550 2 (1.19×10^{-3})	0.02	0.53	0.134 6	0.133 5 (3.39×10^{-3})	1.31	4.42
100	0.05	0.101 4	0.100 8 (3.21×10^{-4})	0.02	0.47	0.054 0	0.053 6 (1.09×10^{-3})	1.23	4.22
	0.10	0.196 0	0.194 8 (2.15×10^{-4})	0.02	0.47	0.108 0	0.108 4 (9.98×10^{-4})	1.22	4.56
	0.15	0.282 5	0.281 4 (8.89×10^{-4})	0.02	0.48	0.162 0	0.161 1 (9.55×10^{-4})	1.23	4.33
105	0.05	0.046 0	0.045 6 (8.02×10^{-4})	0.03	0.63	0.032 2	0.032 5 (5.00×10^{-4})	1.58	4.39
	0.10	0.088 9	0.088 3 (5.74×10^{-4})	0.02	0.66	0.064 5	0.064 3 (1.82×10^{-4})	1.64	4.06
	0.15	0.128 1	0.127 1 (8.02×10^{-4})	0.02	0.50	0.096 7	0.095 8 (1.80×10^{-3})	1.50	4.02

4 结语

本文首次提出了一种基于柳树树状结构快速计算错向风险下 CVA 的算法。一方面,文中指出在无 WWR 时计算 CVA 的核心是计算期望暴露,并详细给出了欧式和百慕大期权下柳树法计算期望暴露的算法;另一方面,用 Hull-White 模型刻画 WWR 时,通过柳树结构校准该模型中的时间依赖函数 $\alpha(t)$ 从而调整新的违约概率。数值实验以几何布朗运动和跳扩散模型下欧式和百慕大看跌期权的 CVA 计算为例,表明柳树法与现有方法相比有相同的计算精度,但计算速度更快,同时柳树法能拟合市场上信用违约互换价差数据,实用性较高。此外,该算法较容易扩展到更复杂的标的资产价格模型,适用范围广。下一步将研究更多 WWR 模型对于 CVA 计算的影响,以及计算欧式和百慕大互换期权下的 CVA。

参考文献:

- [1] Basel Committee. A global regulatory framework for more resilient banks and banking systems [EB/OL]. [2019-02-28]. <https://www.bis.org/publ/bcbs189.htm>.
- [2] ZHU S, PYKHTIN M. A guide to modeling counterparty credit risk [EB/OL]. [2019-02-28]. <https://ssrn.com/abstract=1032522>.
- [3] GREGORY J. Counterparty credit risk: the new challenge for global financial markets [M]. Hoboken: Wiley, 2010.
- [4] BLACK F, SCHOLES M. The pricing of options and corporate liabilities [J]. Journal of Political Economy, 1973, 81 (3): 637.
- [5] MERTON R C. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous[J]. Journal of Financial Economics, 1976, 3 (1/2): 125.
- [6] BRETON M, MARZOUK O. An efficient method to price counterparty risk [EB/OL]. [2019-02-28]. <https://www.gerad.ca/en/papers/G-2014-29>.
- [7] HULL J, WHITE A. CVA and wrong-way risk[J]. Financial Analysts Journal, 2012, 68(5): 58.
- [8] BAVIERA R, LA G, PELLICCIOLI P. CVA with wrong-way risk in the presence of early exercise [C] // Innovations in Derivatives Markets. Berlin: Springer, 2016: 103-116.
- [9] GRAAF L, FENG Q, KANDHAI D, et al. Efficient computation of exposure profiles for counterparty credit risk [J]. International Journal of Theoretical and Applied Finance, 2014, 17(4): 1450024.
- [10] HESTON SL. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options[J]. Review of Financial Studies, 1993, 6(2): 327.
- [11] FENG Q, OOSTERLEE W. Wrong way risk modeling and computation in credit valuation adjustment for European and Bermudan option [EB/OL]. [2019-02-28]. <https://ssrn.com/abstract=2852819>.
- [12] 蒋昇. 交易对手风险研究-基于 Copula 函数的实证分析[D]. 北京: 中国社会科学院, 2013.
JIANG Sheng. Counterparty risk research-empirical analysis based on Copula functions[D]. Beijing: Chinese Academy of Social Sciences, 2013.
- [13] 奚扬阳. 交易对手信用风险的度量及其在权益类衍生品和利率衍生品的应用[D]. 上海: 复旦大学, 2014.
XI Yangyang. Measures of counterparty credit risk and their applications in equity derivatives and interest rate derivatives [D]. Shanghai: Fudan University, 2014.
- [14] XU W, HONG Z, QIN C. A new sampling strategy willow tree method with application to path-dependent option pricing[J]. Quantitative Finance, 2013, 13(6): 861.
- [15] SCHOUTENS W. Lévy processes in finance [M]. Hoboken: Wiley, 2003.
- [16] 姚怡, 李帅芳, 许威. 跳扩散模型下亚式期权定价的柳树法研究[J]. 同济大学学报(自然科学版), 2018, 46(12): 151.
YAO Yi, LI Shuaifang, XU Wei. Efficient willow tree method for asian option pricing under Merton jump-diffusion model[J]. Journal of Tongji University (Natural Science), 2018, 46 (12): 151.
- [17] XU W, YIN Y. Pricing American options by willow tree method under jump-diffusion process [J]. Journal of Derivatives, 2014, 22(1): 46.