

垂直激电测深二维自适应正则化反演

刘海飞¹, 柳建新¹, 阮百尧², 张赛民¹

(1. 中南大学 信息物理工程学院, 湖南 长沙 410083; 2. 桂林工学院 资源与环境工程系, 广西 桂林 541004)

摘要: 为了提高垂直激电测深 2 维反演的分辨率和稳定性, 提出了一种针对垂直激电测深数据的自适应正则化反演方法. 在整个反演过程中, 正则化因子的选取无需人为干涉, 实现了完全的自适应. 给出了极化率数据的广义线性总体光滑约束反演方法, 分别对极化率反演中初始模型的给定、偏导数矩阵的计算及自适应正则化因子的选取进行了研究, 并编制了实用、高效的垂直激电测深 2 维反演软件. 通过对模拟和实测的垂直激电测深数据反演, 验证了方法的可行性和有效性, 编制的反演软件可用于实际生产.

关键词: 地球物理反演; 垂直激电测深; 自适应正则化; 广义线性反演; 偏导数矩阵

中图分类号: P 631

文献标识码: A

2D Self-adaptive Regularization Inversion with Vertical Induced Polarization Sounding Data

LIU Haifei¹, LIU Jianxin¹, RUAN Baiyao², ZHANG Saimin¹

(1. School of Info-Physics and Geometrics Engineering, Central South University, Changsha 410083, China; 2. Department of Resources and Environment Engineering, Guilin Institute of Technology, Guilin 541004, China)

Abstract: The paper presents a self-adaptive regularization inversion method to improve the resolution and stability of 2D inversion for vertical induced polarization sounding (VIPS) data. The choice of regularization factor can be completely self-adaptively adjusted during the global inversion by taking no human effort. First, the generalized linear inversion method is introduced that total smooth constraint is imposed, and studies are made of the construction of initial model, the computation of partial derivative matrix and the choice of self-adaptive regularization factor of VIPS inversion. Then, the practical and effective 2D inversion software of vertical induced polarization sounding is programmed. Finally, it is verified through inverting the simulated and measured VIPS

data that the method is feasible and effective, and the inversion software can be applied to the practical work.

Key words: geophysical inversion; vertical IP sounding; self-adaptive regularization; generalized linear inversion; partial derivative matrix

在地球物理反演中, 正则化因子选取的合理与否直接影响着反演结果的分辨率和反演过程的稳定性, 决定着反演求解过程成功和失败的命运. 自 60 年代 Tikhonov 正则化方法提出以来, 许多学者对正则化参数的选择进行了研究, 并提出了一些具有理论和应用价值的正则化参数的计算方法. Golub 提出了广义交叉验证 (generalized cross-validation, GCV) 方法估计正则化参数^[1], 但在许多实际问题中, GCV 函数在达到极小点时过于平坦, 难于确定哪一点为最小值点, 而且当数据中的噪声相关时, 这一方法求得的正则化参数往往并不理想^[2]. Hansen 提出了求解离散病态问题的自适应正则化方法——L 曲线法, 该方法能够较好地确定“最佳”正则化参数, 在实际中应用较多^[3]. 陈小斌利用数据和模型目标函数自适应计算正则化因子, 并较好地用于大地电磁测深反演中^[4]. 吴小平等给出了固定的正则化因子 0.05, 并用于电阻率 3 维反演中^[5], 但对于数据中含有强噪声的情况, 该方法可能存在一定的局限性. 刘海飞等给出了利用偏导数矩阵的梯度信息自适应计算正则化因子的方法, 已较好地应用于高密度电阻率 2 维反演中^[6]. 本文在此基础上, 将其做了进一步的修正, 使其自适应能力更强, 并将其拓展到垂直激电测深 2 维反演中. 除此之外, 对极化率数据的广义线性反演中初始模型的给定和偏导数矩阵的计算方

收稿日期: 2008-10-15

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (60672042)

作者简介: 刘海飞 (1975—), 男, 讲师, 工学博士, 主要研究方向为电磁法的资料处理及其正反演. E-mail: liuhaifei@126.com

法进行了研究,使反演结果能更好地刻画地下介质的极化特征,解决了传统线性方法对极化率的反演结果常常出现负值的问题.最后,对几例模拟和实测的垂直激电测深数据进行了反演,反演效果较好,软件可用于实际生产.

1 极化率数据的广义线性反演方法

垂直激电测深数据的反演一般分为 2 步:首先完成电阻率数据的反演,然后在固定地下介质电阻率参数的基础上,再完成极化率数据的反演.由于电阻率数据的反演方法已有较多成果发表,不再赘述,在此仅给出极化率数据的广义线性总体光滑约束反演方法.极化率的线性反演方程可表示为

$$\mathbf{A}\Delta\mathbf{m} = \Delta\mathbf{d} \quad (1)$$

式中: \mathbf{A} 为偏导数矩阵; $\Delta\mathbf{d}$ 为数据残差矢量,其值等于实测视极化率的对数值与模拟视极化率的对数值之差($\Delta d_i = \ln \eta_{ai} - \ln \eta_{ci}$, $i = 1, 2, \dots, n$, η_{ai} 和 η_{ci} 分别为实测和模拟的视极化率); $\Delta\mathbf{m}$ 为模型参数的改正向量($\Delta m_j = \Delta \ln \eta_j$, $j = 1, 2, \dots, m$); η_j 为第 j 个网格节点的极化率.

在激电数据的 2 维或 3 维反演过程中,方程(1)通常是欠定的.为提高反演过程的稳定性及得到较准确的解估计,必须在模型空间引入某种稳定化泛函^[7],其中总体稳定化泛函可表示为

$$\Phi_m = \|\mathbf{C}(\mathbf{m} + \Delta\mathbf{m})\|_2^2 = [\mathbf{C}(\mathbf{m} + \Delta\mathbf{m})]^T [\mathbf{C}(\mathbf{m} + \Delta\mathbf{m})] \quad (2)$$

式中: \mathbf{m} 为模型参数向量; \mathbf{C} 为 Tikhonov 稳定化算子,通常以微分、积分或矩阵形式给出.其中矩阵形式的 1 阶稳定化算子的元素可定义为^[8]

$$C_{ij} = \begin{cases} -\frac{1}{r_{ij}} \sum_{j=1}^k \frac{1}{r_{ij}}, & \text{当 } j \text{ 为与 } i \text{ 相邻的节点时} \\ 1, & \text{当 } j = i \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } j \text{ 为其他节点时} \end{cases}$$

式中: k 为与 i 相邻的节点数; r_{ij} 为 i 与 j 节点间的距离.结合式(1)和(2),在最小二乘意义下构造目标函数 Φ 为

$$\Phi = \|\Delta\mathbf{d} - \mathbf{A}\Delta\mathbf{m}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{C}(\mathbf{m} + \Delta\mathbf{m})\|_2^2 \quad (3)$$

式中:等号右端第 1 项为数据空间的数据拟合差项,第 2 项为模型空间的稳定化泛函约束项, λ 为正则化因子.然后将式(3)两端对 $\Delta\mathbf{m}^T$ 求导并令其等于零,得到下面的最小二乘线性反演方程:

$$(\mathbf{A}^T\mathbf{A} + \lambda\mathbf{C}^T\mathbf{C})\Delta\mathbf{m} = \mathbf{A}^T\Delta\mathbf{d} - \lambda\mathbf{C}^T\mathbf{C}\mathbf{m} \quad (4)$$

采用共轭梯度法对方程(4)求解,得到模型参数的修正量 $\Delta\mathbf{m}$,将其代入下式:

$$\mathbf{m}^{(k)} = \mathbf{m}^{(k-1)} + \mu\Delta\mathbf{m} \quad (5)$$

便得到新的预测模型参数向量 $\mathbf{m}^{(k)}$.其中 μ 为修正步长,可由黄金分割线性搜索的方式得到^[8].重复这个过程,直至实测数据和模拟数据之间的平均均方误差 $S_m = \sqrt{\Delta\mathbf{d}^T\Delta\mathbf{d}/n}$ 满足要求为止,反演过程结束.

2 初始模型的给定

目前,针对极化率数据的反演通常采用线性反演方法,即电阻率反演结束后,再解一次线性方程,便得到极化率的反演结果.它所需的计算量很小,可作为广义线性反演的初始模型.当不考虑视极化率和极化率之间的非线性关系时,第 i 点的极化率响应可近似为^[9-10]

$$\eta_{ai} \approx - \sum_j \frac{\partial \ln \rho_{ai}}{\partial \ln \sigma_j} \eta_j = \sum_j \frac{\partial \ln \rho_{ai}}{\partial \ln \rho_j} \eta_j = A_{ij} \eta_j, \\ i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m$$

或写成矩阵形式

$$\boldsymbol{\eta}_a = \mathbf{A}\boldsymbol{\eta}_0$$

式中: $\boldsymbol{\eta}_a$ 为极化率响应向量; $\boldsymbol{\eta}_0$ 为初始极化率模型参数向量; \mathbf{A} 为偏导数矩阵,在电阻率反演中已经得到.通过求解引入背景信息 $\boldsymbol{\eta}_b$ 的线性方程组

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} \\ \sqrt{\lambda} \mathbf{C} \end{vmatrix} \boldsymbol{\eta}_0 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{\eta}_a \\ \sqrt{\lambda} \mathbf{C}\boldsymbol{\eta}_b \end{vmatrix} \quad (6)$$

便得到地下介质的极化率参数 $\boldsymbol{\eta}_0$,将其作为极化率广义线性反演的初始模型.由于向量 $\boldsymbol{\eta}_0$ 的部分元素常常出现负属性值特征,故对其施加最小界限约束,即当 $\boldsymbol{\eta}_0 \leq \boldsymbol{\eta}_{\min}$ 时,则 $\boldsymbol{\eta}_0 = \boldsymbol{\eta}_{\min}$,其中 $\boldsymbol{\eta}_{\min}$ 为极化率的最小界限,本程序中将其设定为 0.1%.

3 偏导数矩阵的计算

根据体极化介质的视极化率的计算公式直接给出第 i 点的极化率响应^[11]

$$\eta_{ai} = (\rho_{ai}^* - \rho_{ai}) / \rho_{ai}^* \quad (7)$$

式中: ρ_{ai} 和 ρ_{ai}^* 分别为第 i 点的视电阻率和等效视电阻率.在对数情况下,用第 i 点的极化率响应 η_{ai} 对第 j 个模型块的极化率 η_j 求导,有

$$\frac{\partial \ln \eta_{ai}}{\partial \ln \eta_j} = \frac{\eta_j}{\eta_{ai}} \frac{\rho_{ai}}{(\rho_{ai}^*)^2} \frac{\partial \rho_{ai}^*}{\partial \eta_j},$$

$$i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m \quad (8)$$

因此只需求出 $\partial \rho_{ai}^* / \partial \eta_j$ 即可. 根据等效电阻率公式

$$\rho^* = \rho / (1 - \eta) \quad (9)$$

式中 ρ 和 ρ^* 分别为电阻率和等效电阻率, 有

$$\frac{\partial \rho_{ai}^*}{\partial \eta_j} = \frac{\partial \rho_{ai}^*}{\partial \rho_j^*} \frac{\partial \rho_j^*}{\partial \eta_j} = \frac{\partial \rho_{ai}^*}{\partial \rho_j^*} \frac{\rho_j}{(1 - \eta_j)^2} =$$

$$\frac{\partial \rho_{ai}^*}{\partial \rho_j^*} \frac{(\rho_j^*)^2}{\rho_j} \quad (10)$$

将式(10)代入式(8)中, 经整理, 便得到第 i 点的视极化率对第 j 个模型块的极化率 η_j 的偏导数

$$A_{ij} = \frac{\partial \ln \eta_{ai}}{\partial \ln \eta_j} = \frac{\eta_j}{\eta_{ai}} \frac{\rho_{ai}}{\rho_j} \left(\frac{\rho_j^*}{\rho_{ai}^*} \right)^2 \frac{\partial \rho_{ai}^*}{\partial \rho_j^*} \quad (11)$$

对于式(11), 与电阻率反演的偏导数矩阵有一定的相似性^[12], 只需将其计算过程略作修改, 便可完成极化率偏导数矩阵的计算.

4 正则化因子的自适应计算

在地球物理反演过程中, 每迭代一步, 都要计算雅克比系数矩阵 \mathbf{A} , 它可以表示为如下形式:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \partial f_1 / \partial x_1 & \partial f_1 / \partial x_2 & \cdots & \partial f_1 / \partial x_m \\ \partial f_2 / \partial x_1 & \partial f_2 / \partial x_2 & \cdots & \partial f_2 / \partial x_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial f_n / \partial x_1 & \partial f_n / \partial x_2 & \cdots & \partial f_n / \partial x_m \end{bmatrix}_{n \times m} \quad (12)$$

其中 $\partial f_i / \partial x_j$ 为模型函数 f_i 对解分量 x_j 的偏导数, 它的含义表示模型函数 f_i 在解分量 x_j 方向上的变化程度. 而 $(\partial f_1 / \partial x_j, \partial f_2 / \partial x_j, \dots, \partial f_n / \partial x_j)^T$ 恰好是式(12)的列向量, 它的长度(或二范数)可表示为

$$\|\mathbf{L}\|_2^j = \left\{ \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)^2 \right\}^{1/2}$$

式中: $\|\mathbf{L}\|_2^j$ 的含义可表示为模型函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ 在解分量 x_j 方向上的总变化率. $\|\mathbf{L}\|_2^j$ 的值越大, 表示 x_j 的作用就越大. 由于地球物理反问题在多数情况下, 属于多元非线性函数的极值问题, 因此为了避免非线性的影响, 对 x_j 的限制就应该大一些, 因此在 x_j 方向上的正则化因子也要取得大一些. 据此, 可构造出自适应正则化因子向量 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$, 其中它的每个分量就是雅克比矩阵 \mathbf{A} 的第 j 列的模^[6], 即

$$\lambda_j = \|\mathbf{L}\|_2^j \quad (13)$$

从垂直激电测深反演试算中发现, 在反演的首

次迭代, λ_j 较大, 并随着迭代次数的增加, 逐渐趋于很小. 为了尽可能地提高反演的收敛速度及保证反演的稳定性, 将式(13)修正为如下形式

$$\lambda_j^{(k)} = \|\mathbf{L}\|_2^j \frac{k}{(10 + k)} \frac{S_{\text{rm}}^{(k-1)}}{S_{\text{rm}}^{(k-2)}}$$

式中: k 为迭代序号, $k = 1, 2, 3, \dots, k_{\text{max}}$; $\lambda_j^{(k)}$ 为第 k 次迭代第 j 个解分量的正则化因子; $S_{\text{rm}}^{(k-1)}$ 表示第 $k-1$ 次迭代的平均均方拟合差. 在整个反演迭代过程中, 不仅每次反演迭代正则化因子自适应改变, 而且在每次反演迭代中各个解分量的正则化因子也是自适应调节的, 无需人为干涉, 实现了完全的自适应.

5 算例

为验证本文自适应正则化方法的可行性和有效性, 对模拟和实测的激电测深数据进行反演试算.

5.1 模型 I

首先对图 1a 所示地电模型采用对称四极微分测深装置进行正演模拟, 电测深点数 10 个, 横坐标 x 从 1 000~1 180 m, 测深点间距 20 m, 供电电极距 $l_{AB}/2$ 和测量极距 $l_{MN}/2$ 详见表 1. 然后对模拟的视电阻率和视极化率数据加入 $-10\% \sim 10\%$ 的随机噪音, 加入噪音的视电阻率和视极化率断面如图 1b 和 1c. 从图中可以看出, 等值线都出现了不同程度的畸变, 特别是视极化率断面图, 相对异常中轴线的对称性特征几乎完全消失. 经过 5 次反演迭代后, 电阻率和极化率的迭代误差分别从 0.585 5 和 0.225 7 下降到 0.052 8 和 0.050 4, 可见收敛速度是相当快的. 电阻率和极化率的广义线性反演断面如图 1d 和 1e, 可以看出, 电阻率和极化率的反演断面都很好地反映了地垒构造的形态, 并且对地下介质的真实电性参数的逼近程度也较高. 与图 1f 极化率数据的线性反演结果相比, 广义线性反演结果更加真实可靠.

表 1 模型 I 的供电和测量电极距排列

Tab. 1 Array of transmitter and receiver electrode distance for the first model m

$l_{AB}/2$	$l_{MN}/2$	$l_{AB}/2$	$l_{MN}/2$	$l_{AB}/2$	$l_{MN}/2$
1.5	0.5	15	3	80	10
2.5	0.5	20	10	100	10
3.5	0.5	30	10	130	10
5.0	0.5	40	10	170	10
7	3	50	10	220	10
10	3	65	10		

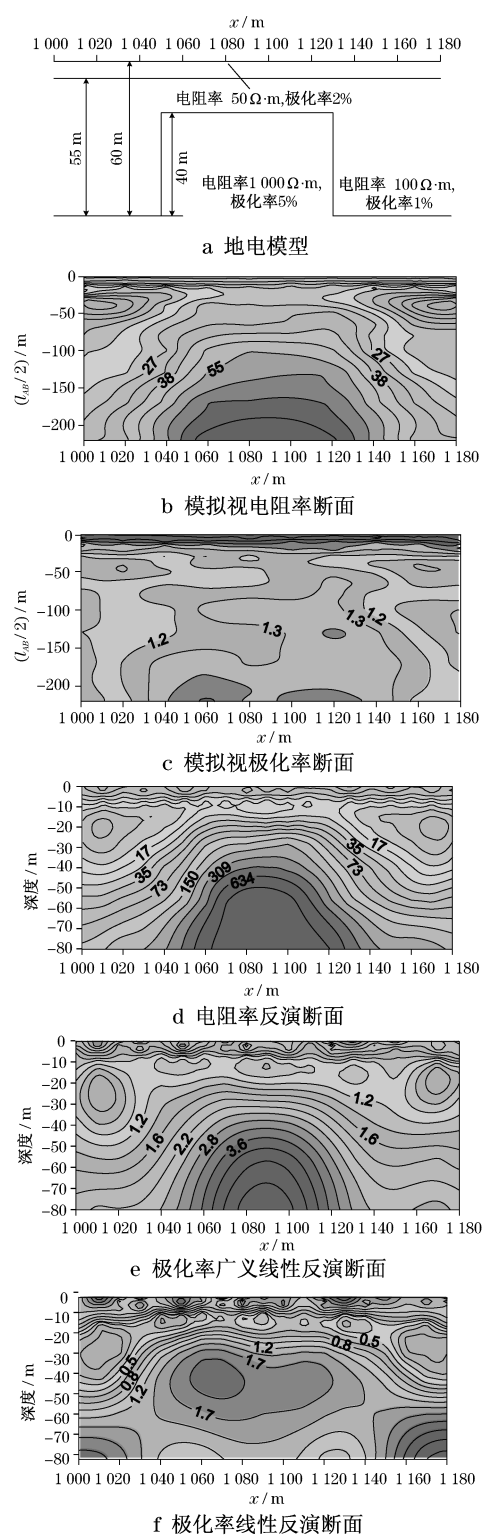


图 1 模型 I 垂直激电测深数据的反演结果

Fig.1 Inverted result of vertical IP sounding data for the first model

5.2 模型 II

对起伏地形条件下的地电模型采用对称四极微分测深装置进行正演模拟,电测深点数 20 个,横坐

标 x 从 1 000~1 380 m,测深点间距 20 m,地下介质的电性参数详见图 2a 所示.供电和测量的电极距排列详见表 2.模拟的视电阻率和视极化率断面如图 2b 和 2c,从断面图中很难推断出高阻、高极化异常体的形态、埋深及右侧断层的倾向.但经过 5 次反演迭代后,电阻率和极化率的迭代误差分别从 0.353 7 和 0.068 9 下降到 0.027 7 和 0.016 4.电阻率和极化率的广义线性反演断面如图 2d 和 2e,反演断面图较准确地再现了高阻、高极化异常体的埋深、形态以及构造的倾向.说明该反演方法对起伏地形条件的垂直激电测深数据进行反演仍然是可行的.图 2e 相对于图 2d 所展示的构造倾向略有偏差,但要优于极化率的线性反演结果,如图 2f.极化率反演结果的好坏在很大程度上取决于电阻率的反演结果,这主要由于极化率反演是在固定地下介质电阻率参数的基础上进行的.

表 2 模型 II 的供电和测量电极距排列

Tab.2 Array of transmitter and receiver electrode distance for the second model

$l_{AB}/2$		$l_{MN}/2$		$l_{AB}/2$		$l_{MN}/2$	
m		m		m		m	
1.5	0.5	20	10	130	20		
2.5	0.5	30	10	170	20		
3.5	0.5	40	10	220	30		
5.0	0.5	50	10	270	30		
7	3	65	10	350	30		
10	3	80	10	420	30		
15	3	100	20				

5.3 实例

对内蒙古某金矿外围 1 条测线上的 14 个实测垂直激电测深点进行反演试算.数据采集使用的最大供电电极距 $l_{AB}/2$ 和测量电极距 $l_{MN}/2$ 分别为 500 m 和 50 m,实测的视电阻率和视极化率断面如图 3a 和图 3b 所示.由于垂直激电测深曲线所特有的“相位滞后”的特性,使得拟断面图上的激电异常向深部的延伸程度过大^[13],从而较难推断低阻、高极化异常体的埋深和形态.但经过 2 维反演后,电阻率和极化率的广义线性反演断面直观地展示了异常体的形态和埋深情况,要优于极化率的线性反演结果,如图 3c,d,e.图中倾斜直线为验证钻孔的位置,终孔深度 316.7 m.矿脉主要集中在深度 38~120 m 范围内,其中:38.65~39.20 m 为闪锌矿、方铅矿矿脉;45.40~48.90 m 为闪锌、方铅矿化破碎带;48.90~49.80 m 为黄铁矿化带;49.90~55.25 m 为变质粉砂岩,其中含有黄铁矿脉和黄铜矿化石英脉;

58.35~104.50 m 为变质粉砂岩和闪长玢岩的交替互层,其中含黄铁矿、黄铜矿、闪锌矿和方铅矿矿脉及其矿化;105.65~106.90 m 为高岭土蚀变带,含有黄铁和黄铜矿脉;117.70~120.80 m 为高岭土化、强硅化角砾岩带,分别在 117.95 m 和 119.00 m

处见 2 条黄铁矿细脉,继续随深度的增加,仅有部分地段矿化,未发现矿脉.从钻孔资料可以看出,反演结果与其吻合很好,更好地印证了本文自适应正则化反演方法是有效的,而且编制的反演软件可在实际生产中推广使用.

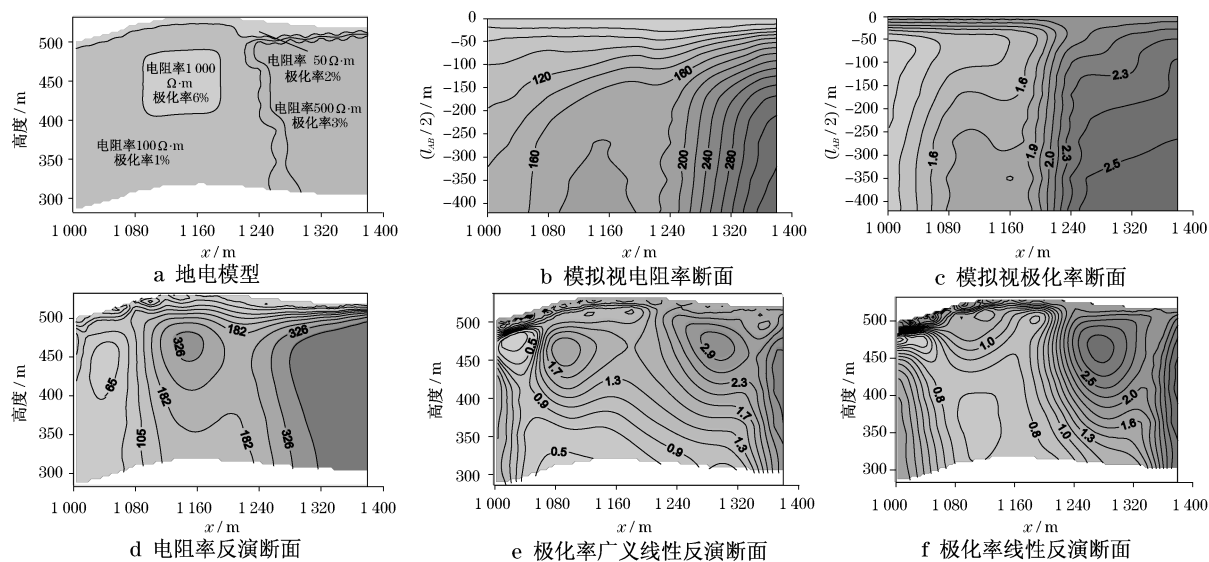


图2 模型Ⅱ垂直激电测深数据的反演结果

Fig.2 Inverted result of vertical IP sounding data for the second model

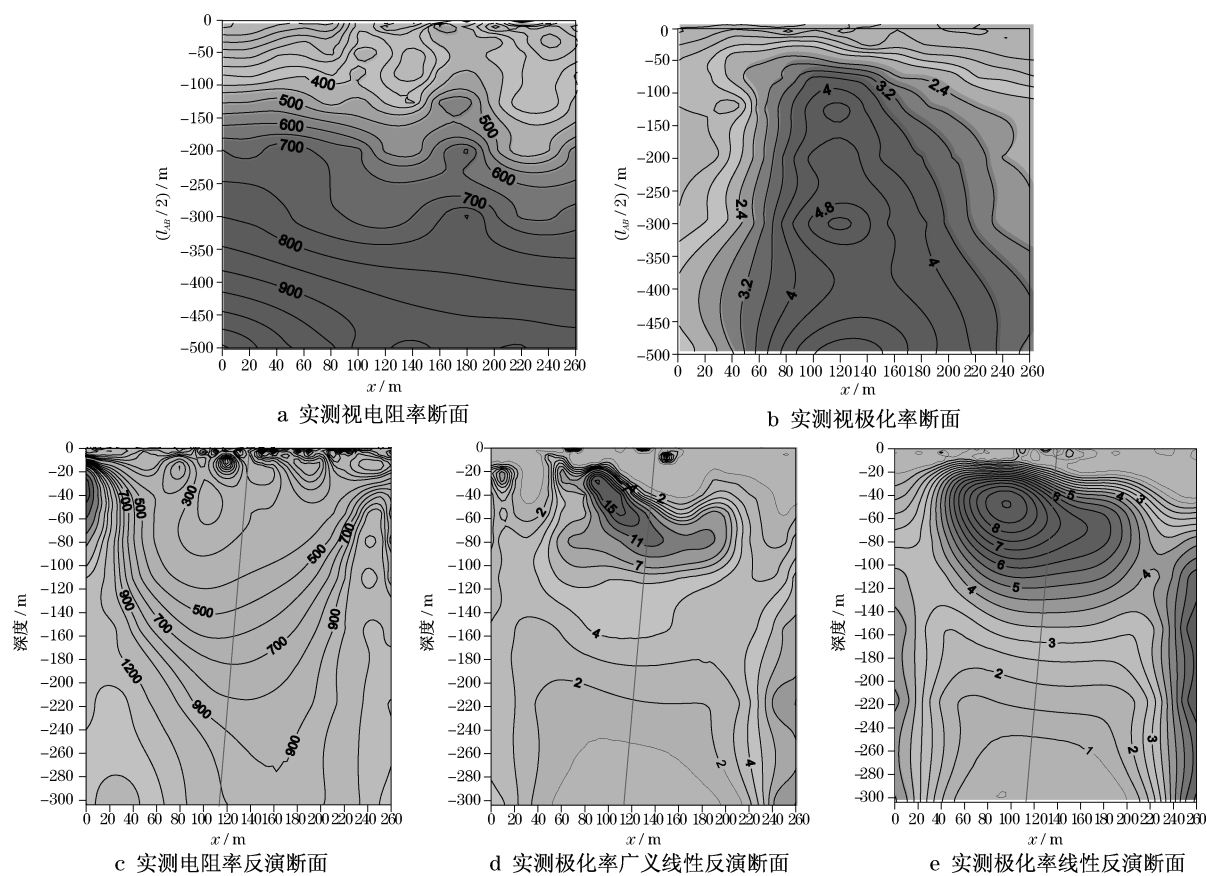


图3 实测垂直激电测深数据的反演结果

Fig.3 Inverted result of measured vertical IP sounding data

6 结论

(1) 本文提出了一种针对垂直激电测深数据的自适应正则化反演方法,在整个反演过程中,程序自主地根据偏导数的梯度信息及误差收敛情况自适应计算正则化因子,可极大消除人为选取正则化因子的盲目性,能有效提高反演的分辨率及反演过程的稳定性。

(2) 采用线性反演方法给定较优的初始激电模型,并在对数条件下计算视极化率对极化率参数的偏导数矩阵,解决了线性反演法的反演结果常常出现负值的问题,而且能有效加快极化率广义线性反演的收敛速度。

(3) 通过对模拟和实测的垂直激电测深数据进行反演试算,结果表明,反演方法可行且有效,编制的反演软件可以在实际生产中推广使用。

参考文献:

- [1] Golub G H, Michael H, Grace W. Generalized cross-validation as a method for choosing a good ridge parameter [J]. *Technometrics*, 1979, 21(2): 215.
- [2] Golub G H, Urs V M. Generalized cross-validation for large scale problems [R]. *Swiss: Swiss Center for Scientific Computing*, 1996.
- [3] Hansen P C. The use of the L-curve in the regularization of discrete ill-posed problems [J]. *SIAM J Sci Comput*, 1993, 14(6): 1487.
- [4] 陈小斌, 赵国泽, 汤吉, 等. 大地电磁自适应正则化反演算法 [J]. *地球物理学报*, 2005, 48(4): 937.
CHEN Xiaobin, ZHAO Guoze, TANG Ji, et al. An adaptive regularized inversion algorithm for magnetotelluric data [J]. *Chinese J Geophys*, 2005, 48(4): 937.
- [5] 吴小平, 徐果明. 利用共扼梯度法的电阻率三维反演研究 [J]. *地球物理学报*, 2000, 43(3): 420.
WU Xiaoping, XU Guoming. Study on 3D resistivity inversion using conjugate gradient method [J]. *Chinese J Geophys*, 2000, 43(3): 420.
- [6] 刘海飞, 阮百尧, 柳建新. 变阻尼共扼梯度算法及其性能分析 [J]. *地球物理学进展*, 2008, 23(1): 89.
LIU Haifei, RUAN Baiyao, LIU Jianxin. The conjugate gradient algorithm of variational damping and its capability analysis [J]. *Progress in Geophysics*, 2008, 23(1): 89.
- [7] De Grootk-Hedin C, Constable S C. Occam's inversion to generate smooth, two-dimensional models from magnetotelluric data [J]. *Geophysics*, 1990, 55(12): 1613.
- [8] 刘海飞. 直流激电中的线性与非线性方法研究 [D]. 长沙: 中南大学信息物理工程学院, 2007.
LIU Haifei. Linear and non-linear inversion methods research on direct current IP measurements [D]. *Changsha: Central South University. School of Info-Physics and Geometrics Engineering*, 2007.
- [9] 阮百尧, 村上裕, 徐世浙. 激发极化数据的最小二乘二维反演方法 [J]. *地球科学*, 1999, 24(6): 619.
RUAN Baiyao, Yutaka Murakami, XU Shizhe. Least square 2D inversion for induced polarization data [J]. *Earth Science-Journal of China University of Geosciences*, 1999, 24(6): 619.
- [10] 阮百尧, 村上裕, 徐世浙. 电阻率/激发极化法数据的二维反演程序 [J]. *物探化探计算技术*, 1999, 21(2): 116.
RUAN Baiyao, Yutaka Murakami, XU Sizhe. 2-D Inversion programs of induced polarization data [J]. *Computing Techniques for Geophysical and Geochemical Exploration*, 1999, 21(2): 116.
- [11] 武汉地质学院金属物探教研室编. 电法勘探教程 [M]. 北京: 地质出版社, 1991.
Teaching and Research Section of Metal Geophysical Exploration of Wuhan Institute of Geology. *Electrical prospecting tutorial* [M]. *Beijing: Geology Press*, 1991.
- [12] 阮百尧. 视电阻率对模型电阻率的雅克比矩阵计算方法 [J]. *地质与勘探*, 2001, 37(6): 39.
RUAN Baiyao. A generation method of the partial derivatives of apparent resistivity with respect to model resistivity parameter [J]. *Geology and Prospecting*, 2001, 37(6): 39.
- [13] 刘海飞, 阮百尧, 柳建新. 激电测深数据一维自动迭代反演进行拟二维反演解释 [J]. *工程地球物理学报*, 2005, 2(5): 343.
LIU Haifei, RUAN Baiyao, LIU Jianxin. Pseudo-2D inversion interpretation IP sounding data using 1D automatic iterative inversion method [J]. *Chinese Journal of Engineering Geophysics*, 2005, 2(5): 343.