第 37 卷第 12 期
2009 年 12 月

同 济 大 学 学 报(自 然 科 学 版)
JOURNAL OF TONGJI UNIVERSITY(NATURAL SCIENCE)

Vol. 37 No. 12
Dec. 2009

文章编号：0253-374X(2009)12-1695-05 DOI：10.3969/j.issn.0253-374x.2009.12.025

一类半方差模型的投资组合问题

朱经浩，刘 彬
(同济大学 数学系，上海 200092)

摘要：把离散半方差模型投资组合问题，推广到连续时间情形.引进恰当的状态约束，将原问题转化为一个有约束的随机最优控制问题.利用经典 Lagrange 理论，将其进一步转化为无约束随机 LQ(Linear Quadratic)最优控制问题.进而借助优化技术计算半方差模型投资组合问题的最优投资决策.

关键词：最优投资组合；随机 LQR 问题；Riccati 方程
中图分类号：O 231.3；O 232 **文献标识码**：A

Solution to Optimal Portfolio Problem Based on Semi-variance Model

ZHU Jinghao，*LIU Bin*
(Department of Mathematics，Tongji University，Shanghai 200092，China)

Abstract：The optimal portfolio is investigated based on the semi-invariance model. A solution is given to the optimal portfoli by means of the feedback optimal control of an linear-quadratic optimal control problem.

Key words：optimal portfolio；stochastic LQR problem；Riccati equation

1 最优投资组合问题

近半个世纪以来，由 Harry Markowitz 建立的均值-方差分析的准则在金融投资领域广泛应用，被视为资本市场的重要理论之一.其通过对不同资产的期望收益、方差和协方差进行分析，寻求风险-收益权衡的资产组合(即投资组合).这一理论基于所有投资者都是风险厌恶者这一假设，而效率限界是这一理论的关键点之一，诠释了收益与风险之间存在某种相关性.简单地来说，投资风险较大的资产能获得相对较高的期望收益，反之亦然.

最初的均值-方差模型利用方差作为投资风险的度量，而实际应用中存在一定的弊端.1959 年，Markowitz 提出了将半方差作为度量风险的尺度，进一步推进了投资组合理论的发展.随后 Karatzas 和 Merton 对连续时间下的金融模型开展了一系列的研究，提出了利用随机最优控制的方法来进行最优投资决策.在文献[1]中，Korn 又将鞅的方法应用于连续时间下的投资组合问题，适用于解决完全市场下的一些投资问题.近年来，Hanqing Jin 等在对半方差模型的研究过程中，获得了一定的进展和突破[2].

本文基于前人的研究成果，就半方差模型展开讨论.将连续时间下的半方差模型转化成带有状态约束的随机最优控制问题.利用优化技术求解该问题，并对计算效率作一定的分析.

2 连续时间下的半方差决策模型

考虑在一个未必完全的竞争市场中，存在 n 种有风险的股票和 1 种无风险债券.在这样的市场中考虑单阶段投资决策问题.市场的不确定性在概率空间(Ω,F,P)中描述，将数学期望记为$E(\cdot)$.在投资期$[0,T]$内，无风险债券的利率记作 $r(t)$，第 i 个证券的收益率记作 $b_i(t)$，则 n 个股票的收益率向量记为$\boldsymbol{b}(t)=(b_1(t),b_2(t),\cdots,b_n(t))'$.

若记在 t 时刻债券的价格为$P_0(t)$，第 i 个股票的价格为 $P_i(t)$.由文献[1]，债券及股票的价格可以由以下微分方程组给定：

$$\mathrm{d}P_0(t)=P_0(t)r(t)\mathrm{d}t,\ P_0(0)=1 \quad (1)$$

收稿日期：2008－09－21
基金项目：国家自然科学基金资助项目(10671145)
作者简介：朱经浩(1949—)，男，教授，博士生导师，理学博士，主要研究方向为最优控制和数学规划.E-mail:jinghaok@online.sh.cn

$$dP_i(t)=P_i(t)\Big(b_i(t)dt+\sum_{j=1}^{m}\sigma_{ij}(t)dW_j(t)\Big),$$

$$P_i(0)=p_i,\ i=1,2,\cdots,n,\ t\in[0,T]\tag{2}$$

式中：$W(t)=(W_1(t),W_2(t),\cdots W_m(t))'$表示服从 m 维 Brownian 运动的随机过程；$\boldsymbol{\sigma}(t)=(\sigma_{ij}(t)),(i=1,2,\cdots,n,j=1,2,\cdots,m)$为 Brownian 运动的协方差矩阵.

若在 t 时刻，投资者持有 $\varphi_i(t)$股第 i 个证券(其中 $i=0$ 代表无风险债券，$i=1,2,\cdots,n$ 代表有风险股票)，从而得到 t 时刻的总资产 $x(t)=\sum_{i=0}^{n}\varphi_i(t)P_i(t)$. 不妨记投资者的投资决策过程为 $\boldsymbol{\pi}(t)=(\pi_1(t),\pi_2(t),\cdots,\pi_n(t))'$，其由下式定义：

$$\pi_i(t)\overset{\text{def}}{=}\frac{\varphi_i(t)P_i(t)}{x(t)},\ i=0,1,\cdots,n\tag{3}$$

显然有$\sum_{i=0}^{n}\pi_i(t)=1$且$\pi_0(t)=1-\pi(t)'\mathbf{1}$. 其中，$\mathbf{1}$表示$(1,1,\cdots,1)'_{1\times n}$. 则结合证券定价方程可以得到以下资产过程：

$$\left.\begin{aligned}&dx(t)=x(t)\{[(1-\pi(t)'\mathbf{1})r(t)+\\&\quad\pi(t)'b(t)]dt+\pi(t)'\sigma(t)dW(t)\}\\&x(0)=x_0>0\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

式中：$\pi\in A'_T(x_0)$，$A'_T(x_0)$是指 π 的可允许的集合.

参照文献[2]，考虑如下连续时间半方差模型：

$$\left.\begin{aligned}&\min\ \frac{1}{2}E\{(x(T)-K)^-\}^2\\&\text{s.t.}\ \ dx(t)=x(t)\{[(1-\pi(t)'\mathbf{1})r(t)+\\&\qquad\pi(t)'b(t)]dt+\pi(t)'\sigma(t)dW(t)\}\\&\quad x(0)=x_0\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

式中：正数 K 代表预先指定的投资目标，而对任意实数$x\in\mathbf{R}$，$x^-\overset{\text{def}}{=}\max(-x,0)$. 本文考虑的单阶段投资组合问题，其数学模型即为一个半方差模型. 下文将把上述模型转换成一个 LQ 随机控制模型，并给出利用优化技术的求解方法.

3　模型的转换与求解

由经典的投资收益理论可知，投资收益取决于投资者对风险的承受能力. 追求过高的收益意味着投资者需要承担更高的风险. 根据谨慎投资原则，应当尽可能小地通过合适的资产配置(组合)分散投资风险. 由于半方差模型(5)实际上是要控制 $x(T)\leqslant K$ 的部分，以下引入一个状态约束 $x(T)\leqslant K$，意指避免追求过高收益率的非理性投资，而把式(5)改为讨论以下模型：

$$\left.\begin{aligned}&\min\frac{1}{2}E(x(T)-K)^2\\&\text{s.t.}\ dx(t)=x(t)\{[(1-\pi(t)'\mathbf{1})r(t)+\\&\qquad\pi(t)'b(t)]dt+\pi(t)'\sigma(t)dW(t)\}\\&\quad x(T)\leqslant K,\ \text{a.s.}\\&\quad x(0)=x_0>0\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

根据经典 Lagrangian 乘子法，对 $d\geqslant0$，构造 Lagrangian 函数

$$L(\pi,d)=-\frac{1}{2}E(x(T)-K)^2-d(E(x(T))-K)\tag{7}$$

可以得到如下对偶性：

$$\max_{\{\pi:x(T)\leqslant K\}}-\frac{1}{2}E(x(T)-K)^2=\max_{\pi\in A'_T(x_0)}\min_{d\geqslant0}L(\pi,d)=\min_{d\geqslant0}\max_{\pi\in A'_T(x_0)}L(\pi,d)\tag{8}$$

其中无约束优化问题满足：

$$\begin{aligned}&\max_{\pi\in A'_T(x_0)}L(\pi,d)=\\&\max_{\pi\in A'_T(x_0)}-E\left[\frac{1}{2}(x(T)-K)^2+d(x(T)-K)\right]=\\&\frac{1}{2}d^2+\max_{\pi\in A'_T(x_0)}-E\left[\frac{1}{2}(x(T)-(K-d))^2\right]=\\&\frac{1}{2}d^2-\min_{\pi\in A'_T(x_0)}E\left[\frac{1}{2}(x(T)-(K-d))^2\right]\end{aligned}\tag{9}$$

理论上对每个 $d\in[0,\infty)$，要求得 $\pi(d)$，使得 $L(\pi(d),d)=\max_{\pi\in A'_T(x_0)}L(\pi,d)$，进而寻找恰当的 $d^*\in[0,\infty)$，使得

$$\begin{aligned}L(\pi(d^*),d^*)&=\min_{d\geqslant0}L(\pi(d),d)=\\&\min_{d\geqslant0}\max_{\pi\in A'_T(x_0)}L(\pi,d)=\max_{\{\pi:x(T)\leqslant K\}}-\\&\frac{1}{2}E(x(T)-K)^2\end{aligned}\tag{10}$$

则要求对每个 $d\in[0,\infty)$，求解无约束投资组合问题 $\min_{\pi\in A'_T(x_0)}E\left[\frac{1}{2}(x(T)-(K-d))^2\right]$. 所幸利用 LQ

随机最优控制的结论[3]，可把 $\min\limits_{\pi\in A'_T(x_0)} E\left[\frac{1}{2}(x(T)-(K-d))^2\right]$的值表示成 d 的一元二次多项式函数，从而使得这一投资组合问题的优化解法行之有效，而$\pi(d^*)$便是原问题的最优投资策略.

注：关于求解无约束投资组合问题(9)，对于完全市场下的投资组合问题，当 $K-d>0$ 时可利用文献[1]所介绍的鞅的方法进行求解. 而本文所专注的是非完全市场下的问题，且要考虑 $K-d\leqslant 0$ 的情形，故必须寻找其他方法. 以下本文经变量替换，将无约束投资组合模型转变为一个无约束随机 LQ 最优控制问题后，得到了行之有效的办法.

4　一个 LQ 随机最优控制问题

为书写方便，记 $\widetilde{K}=K-d$，则可以将式中的无约束问题(10)改写成更一般的形式，归结为求解下列问题：

$$\left.\begin{aligned}&\min E\left(\frac{1}{2}(x(T)-\widetilde{K})^2\right)\\&\text{s.t. } \mathrm{d}x(t)=x(t)\{[(1-\pi(t)'\mathbf{1})r(t)+\\&\qquad\pi(t)'b(t)]\mathrm{d}t+\pi(t)'\sigma(t)\mathrm{d}W(t)\}\\&\quad x(0)=x_0>0\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

对原来的资产过程作变量变换，令 $y=x-\widetilde{K}$，$u=x\pi$，则式(11)可以表示为

$$\left.\begin{aligned}&\min E\,\frac{1}{2}y(T)^2\\&\text{s.t. } \mathrm{d}y(t)=\{r(t)y(t)+[b'(t)-r(t)\mathbf{1}']\cdot\\&\qquad u(t)+r(t)K\}\mathrm{d}t+u'(t)\sigma(t)\mathrm{d}W(t)\\&\quad y(0)=x_0-\widetilde{K}\end{aligned}\right\}\tag{12}$$

易见微分方程(11)关于投资策略 π 的解 $x(t)$，通过变换 $y=x-\widetilde{K}$ 和 $u=x\pi$，必然满足微分方程(12). 问题(12)是一个 LQ 随机最优控制问题，利用黏性解方法，并注意到式(11)的轨道的正定性，可证明如下定理.

定理 1　若 $\hat{y}(t)$为方程(12)的一个最优轨道，则 $\hat{x}(t)=\hat{y}(t)+\widetilde{K}$ 为随机最优控制问题(11)的最优控制轨道，而且有

$$\min_{\pi\in A'_T(x_0)} E\left(\frac{1}{2}(x(T)-\widetilde{K})^2\right)=\min E\,\frac{1}{2}y(T)^2$$

为了方便起见，不妨记 $\boldsymbol{A}(t)=r(t)$，$\boldsymbol{B}(t)=b(t)'-r(t)\mathbf{1}'$，$f(t)=r\widetilde{K}$，$\boldsymbol{D}(t)=\sigma(t)$，并考虑所有系数均为确定性的情形. 通过上述符号变换，可以将式(12)表示成一个随机线性二次控制系统，如下所示：

$$\left.\begin{aligned}&\min J(u)=E\,\frac{1}{2}y(T)^2\\&\text{s.t. } \mathrm{d}y(t)=\{\boldsymbol{A}(t)y(t)+\boldsymbol{B}(t)u(t)+\\&\qquad f(t)\}\mathrm{d}t+u'(t)\boldsymbol{D}(t)\mathrm{d}W(t)\\&\quad y(0)=x_0-\widetilde{K}\end{aligned}\right\}\tag{13}$$

参照文献[4]中的方法，需要求解 Riccati 矩阵微分方程

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{P}}(t)+2\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{P}(t)-\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{B}(t)\cdot\\\qquad\boldsymbol{U}(t)^{-1}\boldsymbol{B}(t)'\boldsymbol{P}(t)=0\\\boldsymbol{P}(T)=1\\\boldsymbol{U}(t)=\boldsymbol{D}(t)'\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{D}(t)>0,\forall\, t\in[0,T]\end{cases}\tag{14}$$

记 $P(t)$为式(14)的解；进一步，引入如下倒向常微分方程：

$$\begin{cases}\mathrm{d}\varphi(t)=-[\widetilde{\boldsymbol{A}}(t)'\varphi(t)+\boldsymbol{P}(t)f(t)]\mathrm{d}t\\\varphi(T)=0\end{cases}\tag{15}$$

其中，$\widetilde{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{L}$，$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{B}'\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{D}'\boldsymbol{P}\boldsymbol{D}$. 记 $\varphi(t)$为式(15)的解. 类似文献[3]中的定理 3.1，利用 Ito 公式可证明以下结果.

定理 2　若 $\boldsymbol{P}(\cdot)$是 Riccati 矩阵微分方程的解，$\varphi(\cdot)$是倒向常微分方程(15)的解，则随机 LQR 问题(13)存在反馈最优控制

$$u^*(t,y)=-\boldsymbol{U}^{-1}(t)[\boldsymbol{L}(t)y+h(t)]\tag{16}$$

其中 $h(t)=\boldsymbol{B}(t)'\varphi(t)$. 进而，问题(13)的最优值具有如下形式：

$$\min_{u(\cdot)\in U_{ad}} J(u(\cdot))=\frac{1}{2}E\int_0^T[-h'\boldsymbol{U}^{-1}h+2\varphi'f](t)\mathrm{d}t+\frac{1}{2}y'_0\boldsymbol{P}(0)y_0+\varphi(0)'y_0\tag{17}$$

5　投资组合模型的最优解

本节完成对投资组合问题(6)的求解. 在本文第

3节中,把求解模型(6)归结为求解

$$\min_{d\geqslant 0}\left\{\frac{1}{2}d^2-\min_{\pi\in A'_T(x_0)}E\left(\frac{1}{2}(x(T)-(K-d))^2\right)\right\}. \tag{18}$$

以下把 $\frac{1}{2}d^2-\min_{\pi\in A'_T(x_0)}E\left(\frac{1}{2}(x(T)-(K-d))^2\right)$ 表示成 d 的一个二次函数,则问题(18)便迎刃而解.

由本文定理1,2可知

$$\min_{\pi\in A'_T(x_0)}E\left(\frac{1}{2}(x(T)-(K-d))^2\right)=\min E\frac{1}{2}y(T)^2=\min_{u(\cdot)\in U_{ad}}J(u(\cdot))=\frac{1}{2}E\int_0^T[-h'U^{-1}h+2\varphi'f](t)\mathrm{d}t+\frac{1}{2}y_0^2P(0)+\varphi(0)y_0.$$

以下说明可把上式右端写成 $\widetilde{K}=K-d$ 的二次函数.参照文献[1]中的理论,可以将倒向微分方程(15)的解表示成如下形式:

$$\varphi(t)=Z(t)\widetilde{K}\int_t^T\left[\frac{1}{Z(u)}(\boldsymbol{P}(u)r(u))\right]\mathrm{d}u \tag{19}$$

其中 $Z(t)=\exp(\int_t^T\widetilde{\boldsymbol{A}}(s)\mathrm{d}s)$.为了方便起见,不妨记 $\Psi(t)=Z(T)\int_t^T\left[\frac{1}{Z(u)}(\boldsymbol{P}(u)r(u))\right]\mathrm{d}u$,则式(19)可记为

$$\varphi(t)=\Psi(t)\widetilde{K} \tag{20}$$

将式(20)代入(17)右端,经整理后,可以将式(17)表示为以下形式:

$$\inf_{u(\cdot)\in U_{ad}}J(u(\cdot))=\left\{\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\int_0^T[2\Psi(t)r(t)-\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{B}(t)'\Psi(t)^2]\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\boldsymbol{P}(0)-\Psi(0)\right\}\widetilde{K}^2+(\Psi(0)-\boldsymbol{P}(0))x_0\widetilde{K}+\frac{1}{2}\boldsymbol{P}(0)x_0^2 \tag{21}$$

不妨记

$$\Xi=\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\int_0^T[2\Psi(t)r(t)-\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{U}^{-1}\cdot\boldsymbol{B}(t)'\Psi(t)^2]\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\boldsymbol{P}(0)-\Psi(0)$$

$$\omega=(\Psi(0)-\boldsymbol{P}(0))x_0$$

$$\tau=\frac{1}{2}\boldsymbol{P}(0)x_0^2$$

则式(21)又可以表示为 $\inf_{u(\cdot)\in U_{ad}}J(u(\cdot))=\Xi\widetilde{K}^2+\omega\widetilde{K}+\tau$,又 $\widetilde{K}=K-d$,所以

$$\min_{d\geqslant 0}\left(\frac{1}{2}d^2-\min_{\pi\in A'_T(x_0)}E\left(\frac{1}{2}(x(T)-(K-d))^2\right)\right)=\frac{1}{2}d^2-\Xi\widetilde{K}^2-\omega\widetilde{K}-\tau=\frac{1}{2}d^2-\Xi(K-d)^2-\omega(K-d)-\tau=\left(\frac{1}{2}-\Xi\right)d^2+(2\Xi K+\omega)d-\Xi K^2-\omega K-\tau \tag{22}$$

由此,式(22)即为一个关于 d 的一元二次函数.在参数给定的条件下,式(22)中的 Ξ,ω,τ 皆可通过计算来确定其数值,当二次项系数为正数时,在[0,∞)中易求得使得式(22)最小的 d^*.根据本节中求得的 d^*,求解第4节中的LQ随机最优控制问题,由第4节中的变量替换公式便可求得问题(6)的最优决策控制和最优财富轨道.

6 例子

假设市场中只有一个无风险债券和一种股票,令投资者的初始财富为 $x_0=1\,000$,阶段时间 $T=1$,取 $K=1\,100$ 作为投资目标,在不同的市场环境下作模拟计算.

根据表1,模拟不同投资市场环境,得到了Lagrange乘子 d^* 的值,由此可以得到相应的最优值.

表1 最优Lagrangian乘子

Tab.1 Optimal Lagrangian multiplier

r	b	σ	$\frac{1}{2}-\Xi$	$2\Xi K+\omega$	$-\Xi K^2-\omega K-\tau$	d^*
0.05	0.10	0.25	0.019 6	46.818 2	−1 140.700 2	0
0.05	0.10	0.50	0.497 5	48.244 0	−1 175.439 7	0
0.10	0.30	0.25	0.236 4	−2.726 6	−7.049 5	5.768
0.10	0.50	0.40	0.316 1	−1.902 3	−4.918 3	3.009

表 2 中的最优值代表的是不同环境下模型所得出的最优投资组合的投资风险. 最优值的绝对值越小代表所承担的风险越小. 由此验证了市场风险与投资收益以及股票波动之间的关系. 第 2 组数据之所以风险大是因为其市场预期收益小，而股票波动大；而第 4 组数据其无风险收益高，股票预期收益也较高，而相应的股票波动较小，故而承担相对较小的投资风险.

表 2　最优值

Tab.2　Optimal value

组	r	b	σ	最优值
1	0.05	0.10	0.25	−1 140.700 00
2	0.05	0.10	0.50	−1 175.440 00
3	0.10	0.30	0.25	−14.911 50
4	0.10	0.50	0.40	−7.780 33

求解相应的 LQR 问题，即可求出最优投资决策 π. 在完全市场下，π 也可以通过文献[1]中的鞅的方法求得；若在非完全市场下，则可利用黏性解的方法计算.

参考文献：

［1］ Korn R. Optimal portfolios: stochastic models for optimal investment and risk management in continuous time［M］. Singapore: World Scientific Publishing Co Ltd, 1997.

［2］ JIN Hanqing, Markowitz H, ZHOU Xunyu. A note on semivariance［J］. Mathematical Finance, 2006, 16(1): 53.

［3］ CHEN Shuping, ZHOU Xunyu. Stochastic linear quadratic regulators with indefinite control weight costs Ⅱ［J］. SIAM J Control Optim, 2000, 39(4): 1065.

［4］ CHEN Shuping, LI Xunjing, ZHOU Xunyu. Stochastic linear quadratic regulators with indefinite control weight costs［J］. SIAM J Control Optim, 1998, 36(5): 1685.

（上接第 1694 页）

5　结论

（1）Visual MODFLOW 具有可视化、标准化及自动求参等特点，能方便地在计算机上确定模型区域、完全自动剖分和加密剖分，而且有丰富的边界类型供选择.

（2）三门峡铝土矿区寒武—奥陶系灰岩岩溶裂隙含水层是未来铝土矿开采过程中的直接充水含水层，建议应对地下水采取疏干排水措施进行重点防治，在矿井建设和矿山开采前采取超前疏干到设计开采标高水平.

（3）采用定流量抽水方案，在本矿区拟凿 10 口疏干井以单井涌水量 5 000 $m^3 \cdot d^{-1}$进行抽水，629 d 后即达到设计的段村 420 m、雷沟 320 m 疏干水平.

（4）采用定水头疏干方案，利用建立的数学模型预测矿坑涌水量，得到平水年的平均降水量和偏丰水年的雨季降雨量的矿坑疏干量分别为28 548 $m^3 \cdot d^{-1}$和 30 978 $m^3 \cdot d^{-1}$. 矿山开采时应根据季节的变化调整疏干水泵的台数，以满足排水的要求.

参考文献：

［1］ 薛禹群，叶淑君，谢春红，等. 多尺度有限元法在地下水模拟中的应用［J］. 水利学报，2006，37(7)：7.
XUE Yuqun, YE Shujun, XIE Chunhong, et al. Application of multi-scale finite element method to simulation of groundwater flow［J］. Journal of Hydraulic Engineering. 2006, 37(7): 7.

［2］ 王旭生. 自流井有限差分模拟的校正模型［J］. 地球科学——中国地质大学学报，2008，33(1)：112.
WANG Xusheng. Revised model for finite-difference modeling of flowing artesian wells［J］. Earth Science——Journal of China University of Geosciences. 2008, 33(1): 112.

［3］ 吴剑锋，朱学愚. 由 MODFLOW 浅谈地下水流数值模拟软件的发展趋势［J］. 工程勘察，2000(2)：11.
WU Jianfeng, ZHU Xueyu. Study on development trend of Software of subsurface flow numerical simulation from MODFLOW［J］. Geotechnical Investigation & Surveying, 2000(2): 11.

［4］ Barlow P M. Harbaugh A W. USGS directions in MODFLOW development［J］. Groundwater, 2006, 44(6): 771.

［5］ Mc Donald M G, Harbaugh A W. The history of MODFLOW［J］. Groundwater, 2003, 41(2): 280.

［6］ Guiguer N. Waterloo hydrogeologic visual modflow user's manual［M］. Ontario: Waterloo Hydrogeologic Inc, 2004.

［7］ 周念清，朱蓉，朱学愚. Modflow 在宿迁市地下水资源评价中的应用［J］. 水文地质工程地质，2001(6)：9.
ZHOU Nianqing, ZHU Rong, ZHU Xueyu. Application of MODFLOW in groundwater resources evaluation in Suqian City［J］. Hydrogeology and Engineering Geology. 2001(6): 9.

［8］ Halford K J, Yobbi D. Estimating hydraulic properties using a moving-model approach and multiple aquifer tests［J］. Groundwater, 2006, 44(2): 284.