文章编号：0253-374X(2009)12-1700-06　　DOI：10.3969/j.issn.0253-374x.2009.12.026

方差衍生产品定价与控制变量蒙特卡罗方法

马俊美[1]，徐承龙[1,2]，周　晶[1]
(1.同济大学 数学系，上海 200092；2.上海市科学计算 E－研究院及上海市科学计算重点实验室，上海 200234)

摘要：建立了方差互换金融衍生产品的定价模型，基于控制变量技巧，对随机波动率情形下的一类方差互换产品的定价问题，提出了一种有效的蒙特卡罗计算方法.通过进一步的理论分析和高效率控制变量的选取，大大减小了模拟误差，提高了计算效率.最后，对数值结果进行了分析，并考察了影响方差互换产品价格的因素.该计算方法可为其他方差互换衍生产品，如 Corridor 方差互换、Gamma 方差互换和 Conditional 方差互换等产品以及其他多因子模型假设下的衍生产品定价提供有效思路.

关键词：金融衍生产品；方差互换；随机波动率；蒙特卡罗方法；控制变量

中图分类号：F 830.9　　**文献标识码**：A

Variance Derivatives Pricing and Control Variate Monte Carlo Method

MA Junmei[1]，*XU Chenglong*[1,2]，*ZHOU Jing*[1]
(1.Mathematics Department of Tongji University，Shanghai 200092，China；2.Shanghai E-Institute of Scientific Computing and Shanghai Key Laboratory of Scientific Computing，Shanghai 200234，China)

Abstract：The paper presents an efficient Monte Carlo method on the basis of the Control Variate technique for valuation of the Variance Swap derivatives under the stochastic volatility assumption. The result shows that the method can reduce variance efficiently and improve precision obviously by choosing an efficient control variate testified with the computation results. Finally，a study is also made of the factors affecting the price of the Variance Swap. The method can also be applied to the other valuation of Variance Swaps，such as Corridor Variance Swap，Gamma Variance Swap，Conditional Variance Swap and other products with multi-factor models.

Key words：derivatives；variance swap；stochastic volatility；Monte Carlo method；control variate

国际期权市场协会(IOMA)与国际期权清算协会(IOCA)在芝加哥举行的 2005 年年会期间，在国际期权市场协会(IOMA)会议上所作的报告中指出，自 1973 年布莱克-斯科尔斯(Black-Scholes)期权定价模型创立以来，波动率就始终是市场关注的焦点之一.通过对 1998 年以来的金融衍生品市场中交易波动率产品的发展情况的考察，可以发现就交易和套利的研究，国外的对冲基金和投行的套利部门十分重视对波动率交易策略和波动率产品的开发.交易波动率除了将不同市场连接起来，同时对整个资本市场也存在重大的意义.方差作为市场交易风险的一种量化的量度，在交易越来越频繁、交易方式越来越复杂的金融环境中，重要性日趋突显，因此衍生出了方差和波动率互换市场.

方差互换是众多互换产品的一种，它是一份远期合约，收益基于某资产指数的实际方差.合约买方从签订方可获得的收益取决于整个合约期内实现的资产指数波动率超出合约签订时敲定的波动率的多少，偿付额为一设定的单位乘数与此差值的乘积，即 $P=M(\sigma_r^2-K_{var}^2)$.式中：$M$ 是名义本金，σ_r^2 是实际方差，K_{var}^2是敲定方差.现今，在原有方差互换的基础上，又衍生出新一代方差互换产品，包括：Corridor 方差互换、Gamma 方差互换和 Conditional 方差互换等.

风险来源于不确定性，国外的波动率交易会广泛地开展，源于对风险的重视.1997 和 1998 年的金融危机为金融市场带来了很高的波动率风险水平后，波动率衍生产品便蓬勃发展起来，与之相关的产品模型的建立和定价研究，也有了重大进步.具有代表性的较早学者有 Derman 等[1]和 Detemple 等[2]，他们揭示了方差互换产品的性质，以 Black-Scholes 期权定价理论为基础，提出通过一系列标准期权的

收稿日期：2009－01－06
基金项目：国家“九七三”重点基础研究发展计划资助项目(2007CB814903)；上海市教委 E－研究院资助项目(E03004)
作者简介：马俊美(1983—)，女，博士生，主要研究方向为计算数学及金融数学.E-mail：majunmei123321@163.com
徐承龙(1963—)，男，教授，博士生导师，理学博士，主要研究方向为计算数学及金融数学.E-mail：clxu601@online.sh.cn

投资组合来复制相应的互换;Brockhaus 等[3]对波动率衍生产品价格提供了近似解析解;他们的理论研究促进了方差互换产品的兴起和发展.

本文使用偏微分方程(PDE)方法建立了方差互换衍生产品的定价模型,基于控制变量(control variate)技巧,对随机波动率情形下的一类方差互换产品的定价问题,提出了一种有效的蒙特卡罗(Monte Carlo)计算方法.通过进一步的理论分析和高效率控制变量的选取,大大减小了模拟误差,提高了计算效率.最后,对数值结果进行了分析,并考察了影响方差互换产品价格的因素.本文提出的计算方法也适用于其他方差互换产品的定价,以及多因子模型下的衍生产品定价.

1　定价模型

本文对方差互换定价模型的讨论是建立在随机波动率假设前提下.随机波动率问题的研究是从上世纪 70 年代开始的.1973 年,Black 和 Scholes 给出了股票期权的定价公式,成为衍生品定价上的一项重大突破.然而 Black-Scholes 模型假定波动率为一常数,这一假设无法与期权的实际情况相符合,因为实际情况下,标的资产的概率分布并不是呈现为一个对数正态分布,它的两尾不是完全对称的;该假设也与实际市场不一致,波动率的微笑曲线验证了这一点.随机波动率模型是对确定型波动率模型的拓展,其概念最先由 Hull 和 White[4]提出,之后 Scott[5]及 Stein-Stein[6]等,对其研究工作做了进一步拓展,提出不同的随机波动率模型.

本文所使用的随机波动率模型是由 Hull 和 White[4]于 1987 年最初提出的几何布朗运动的随机波动率模型.即在鞅测度下,标的资产 $S(t)$ 和波动率 σ_t 适合如下随机微分方程:

$$\mathrm{d}S_t/S_t = r\mathrm{d}t + \sigma_t \mathrm{d}W_{1t},\ \sigma_t = \sqrt{Y_t} \tag{1}$$

$$\mathrm{d}Y_t/Y_t = \mu \mathrm{d}t + \hat{\sigma}\mathrm{d}W_{2t} \tag{2}$$

式中:r 为常数,表示无风险利率;$\mu > 0$ 和 $\hat{\sigma} > 0$ 亦为常数,分别描述方差的漂移和波动情况;W_{1t} 和 W_{2t} 是标准 Brown 运动,且 $\mathrm{Cov}(\mathrm{d}W_{1t}, \mathrm{d}W_{2t}) = \rho\mathrm{d}t$.进一步,假设市场无套利,不考虑市场摩擦,下面建立方差互换产品的定价模型.

设 $t_0 = 0, t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T$ 是 $[0, T]$ 上的 N 个观察日,$S_i \triangleq S_{t_i}$ 是第 i 个观察日的收盘价,$Y_i \triangleq Y_{t_i}$ 是 t_i 时刻的方差.根据方差互换条款,该产品的到期收益为

$$V\Big|_{t=T} = M\left(\sum_{i=1}^{N}\left(\ln\frac{S_i}{S_{i-1}}\right)^2 - K_{\mathrm{var}}^2\right) \triangleq h(S_0, S_1, \cdots, S_N) \tag{3}$$

在随机微分方程(1)和(2)中出现了 2 个随机源,为了对冲由于波动率的随机性所带来的风险,需要在标的资产以外,引入一个不同到期日、不同敲定价的期权 V_t^*,组成投资组合进行对冲.在 (t_{i-1}, t_i) 内,选择 Δ_1 和 Δ_2 使投资组合 $\Pi = V - \Delta_1 S - \Delta_2 V^*$ 在 $[t, t+\mathrm{d}t]$ 上是无风险的,可推导出 $V = V(S, Y, t)$ 满足的偏微分方程如下[5]:

$$LV \triangleq \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}YS^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2 Y^2\frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + \rho\hat{\sigma}\sqrt{Y}\frac{\partial^2 V}{\partial S\partial Y} + rS\frac{\partial V}{\partial S} + \mu Y\frac{\partial V}{\partial Y} - rV = 0$$

设在 (t_{i-1}, t_i) 内 $V = V_i\ (i = 1, 2, \cdots, N)$,从而可得如下方差互换产品定价的数学模型:

$$\begin{cases} LV_N = 0,\ 0 < S < +\infty, 0 < Y < +\infty, \\ \qquad t_{N-1} < t \leqslant t_N = T \\ V_N\Big|_{t=T} = h(S_0, S_1, \cdots, S_{N-1}, S) \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} LV_i = 0,\ 0 < S < +\infty, 0 < Y < +\infty, \\ \qquad t_{i-1} < t \leqslant t_i \\ V_i\Big|_{t=t_i} = V_{i+1}\Big|_{t=t_i},\ i = 1, 2, \cdots, N-1 \end{cases} \tag{5}$$

先从上面第 1 个问题中解出 $V_N(S_1, \cdots, S_{N-1}, S, t)$,在 $t = t_{N-1}$ 时,$S = S_{N-1}$,所以 $V_{N-1}\Big|_{t=t_{N-1}} = V_N(S_1, \cdots, S_{N-1}, S_{N-1}, t_{N-1})$ 作为第 2 个问题的终值条件可依次解出 $V_{N-1}, \cdots, V_1$.

Hull 和 White[4]用概率方法研究了特例 $N = 1$,$\rho = 0$ 时该问题的解的情况,通过引入平均方差 $\bar{Y} = \frac{1}{T}\int_0^T Y_t \mathrm{d}t$,得到问题的形式表达式为

$$V(S_t, Y_t, t) = \int q(\bar{Y} \mid Y_t)\mathrm{e}^{-r(T-t)}\int_{-\infty}^{+\infty} 1\Big/\sqrt{2\pi}\ \cdot \exp[-\theta^2/2]\, h\left(S_0 \mathrm{e}^{\sqrt{\bar{Y}(T-t)}\theta - \beta\bar{Y}(T-t)}\right)\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\bar{Y}$$

式中:$\beta = 1/2 - r/\sigma^2$;$q(\bar{Y} \mid Y_t)$ 为 $\bar{Y}$ 的密度函数,简记为 $q(\bar{Y})$,满足如下微分方程:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\bar{Y} - Y}{T - t}\frac{\partial q}{\partial \bar{Y}} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\bar{Y}^2\frac{\partial q}{\partial Y} + \mu Y\frac{\partial q}{\partial Y} = 0$$

然而上述问题没有封闭解.

类似的方法,根据 V 在 t_i 处连续,可以写出当 $\rho = 0$ 时问题(4)和(5)的形式解为

$$V(S, Y, 0) = \int_0^{+\infty}\cdots\int_0^{+\infty} q(\bar{Y}_1)\cdots q(\bar{Y}_N)\ \cdot$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}(\sqrt{2\pi})^{-N}\mathrm{e}^{A}\mathrm{e}^{B}h(S_0\mathrm{e}^{\alpha_1},\cdots,S_0\mathrm{e}^{\alpha_N})\cdot \mathrm{d}\theta_1\cdots\mathrm{d}\theta_N\,\mathrm{d}\bar{Y}_1\cdots\mathrm{d}\bar{Y}_N \tag{6}$$

式中：$A=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\Delta t_i+\sum_{i=1}^{N}\beta_i^2\bar{Y}_i\Delta t_i/2$；

$B=-(\theta_1^2+\cdots+\theta_N^2)/2$；

$\alpha_1=\sqrt{\bar{Y}_1\Delta t_1}-\beta_1\sqrt{\bar{Y}_1\Delta t_1}$；

$\alpha_N=\sqrt{\bar{Y}_1\Delta t_1}\,\theta_1-\beta_1\sqrt{\bar{Y}_1\Delta t_1}+\cdots+\sqrt{\bar{Y}_N\Delta t_N}\,\theta_N-\beta_N\sqrt{\bar{Y}_N\Delta t_N}$；

$\bar{Y}_i=\int_{t_{i-1}}^{t_i}Y_t\mathrm{d}t/(t_i-t_{i-1})$；

$\alpha_i=-r-1/\sum\bar{Y}_i(r-\bar{Y}_i/2)^2$；

$\beta_i=1/2-r/\bar{Y}_i$；

$i=1,\cdots,N$.

由于$\{\bar{Y}_i\}\big|_{i=1,\cdots,N}$的各概率密度没有封闭解，很难得到式(6)的解析表达式，所以只能通过数值方法估计. 对于此类路径依赖变量的产品定价问题，若用有限差分方法直接对问题(6)求解，所需计算量极大，例如当 $N=5$ 时，即使对 S 方向只 20 等分，其变量个数就达 $20^5\approx5\times10^7$，进行计算所需付出代价太大. 以下将应用控制变量技巧研究此计算问题. 数值结果表明这是一种有效的方法.

2 控制变量 Monte Carlo 方法

控制变量技巧是一种被广泛使用的减小 Monte Carlo 模拟误差的方法，它是一种充分利用已知量的估计误差来降低未知量的估计误差的技术[7]. 若 $V_1,\cdots,V_m$ 是期权到期回报贴现的 m 次独立模拟值，那么期权价格的 Monte Carlo 估计为 $\bar{V}=(V_1+\cdots+V_m)/m$. 假设得到 V_i 的同时能得到另一个随机变量 X 的样本 X_i，$E[X]$已知，样本(X_i,Y_i)独立，则对于确定的数 b 有 $V_i(b)=V_i-b(X_i-E[X])$. 则期权价格的控制变量估计值即为$\bar{V}(b)=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(V_i-b(X_i-E[X]))$. 控制变量估计是无偏估计，且方差为 $\mathrm{Var}(V_i(b))=\mathrm{Var}(V)+b^2\mathrm{Var}(X)-2b\sqrt{\mathrm{Var}(V)}\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\rho_{XV}$. 当最优控制系数 $b^*=\mathrm{Cov}[X,V]/\mathrm{Var}(X)$时，上述方差达到最小，为

$$\mathrm{Var}(V_i(b^*))=(1-\rho_{XY}^2)\mathrm{Var}(V_i)$$

控制变量估计的误差减小效果取决于待定价期权与控制变量的相关性，相关性越大方差减小效果越好.

目前，很多学者致力于控制变量 Monte Carlo 方法为金融衍生产品定价的研究. Nelson[8] 有相关文献的系统介绍，在此不再做详细的介绍.

下面使用 PDE 方法求波动率为常数时方差互换产品价格，即控制变量的解.

2.1 控制变量问题的求解

考虑另外一种衍生产品，像标准方差互换条款一样，名义本金也为 M，敲定方差也为 K_{var}^2，同样的观察日期 $t_0=0,t_0<t_1<\cdots<t_N=T$，但标的资产过程 S_t 服从常数几何布朗运动

$$\mathrm{d}S_t/S_t=r\mathrm{d}t+\sigma_{\mathrm{c}}\mathrm{d}W_{1t} \tag{7}$$

式中：$r>0$ 为无风险利率；$\sigma_{\mathrm{c}}>0$ 为波动率；W_{1t} 与式(1)中 W_{1t} 为相同的布朗运动.

产品的收益函数也为 $h(S_0,S_1,\cdots,S_N)$，$W=W(S,t)$表示该产品价值，定价模型为

$$\begin{cases}L_1W\triangleq\dfrac{\partial W}{\partial t}+\dfrac{1}{2}\sigma_{\mathrm{c}}{}^2S^2\dfrac{\partial^2W}{\partial S^2}+rS\dfrac{\partial W}{\partial S}-rW=0,\\ \qquad 0<S<+\infty,t_{i-1}<t\leqslant t_i\\ W\big|_{t=T}=h(S_0,S_1,\cdots,S_N)\end{cases} \tag{8}$$

根据 W 在 t_i 处连续，以下求解当有 N 个观察点时的初值问题(8)的解析表达式.

先考虑单个观测点的情形，则定价模型为

$$\begin{cases}L_1W=0,\ 0<S<+\infty,\ 0<t\leqslant T\\ W\big|_{t=T}=h(S_0,S)\end{cases}$$

其解析解为

$$W(S_0,0)=\mathrm{e}^{-rT}\int_{-\infty}^{+\infty}1/\sqrt{2\pi}\exp[-1/2\theta^2]h\cdot(S_0,S_0\mathrm{e}^{\sigma_{\mathrm{c}}\sqrt{T}\theta-\beta\sigma_{\mathrm{c}}^2T})\mathrm{d}\theta \tag{9}$$

N 个观测点的情形，其定价模型为

$$\begin{cases}L_1W_N=0,\ 0<S<+\infty,t_{N-1}\leqslant t<t_N=T\\ W_N\big|_{t=t_N}=h(S_0,S_1,\cdots,S_{N-1},S)\end{cases}$$

$$\begin{cases}L_1W_i=0,\ 0<S<+\infty,t_{i-1}<t\leqslant t_i\\ W_i\big|_{t=t_i}=W_{i+1}(S_i,t_i^+),\ i=1,2,\cdots,N-1\end{cases}$$

利用单个观测点的计算结果及 W 在 t_i 处的连续性，通过归纳法可推得

$$W(S_0,0)=\mathrm{e}^{-rT}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}1/(\sqrt{2\pi})^N\cdot\exp[-(\theta_1^2+\cdots+\theta_N^2)/2]h(S_0,S_0\mathrm{e}^{\sigma_{\mathrm{c}}\sqrt{\Delta t_1}\theta_1-\beta\sigma_{\mathrm{c}}^2\Delta t_1},\cdots,S_0\mathrm{e}^{\sigma_{\mathrm{c}}\sqrt{\Delta t_1}\theta_1-\beta\sigma_{\mathrm{c}}{}^2\Delta t_1+\cdots+\sigma_{\mathrm{c}}\sqrt{\Delta t_N}\theta_N-\beta\sigma_{\mathrm{c}}^2\Delta t_N})\mathrm{d}\theta_1\cdots\mathrm{d}\theta_N \tag{10}$$

取收益函数 h 如式(3)，计算得如下定理.

定理 1　基于标的过程(7)的具有 N 个观察点的标准方差互换产品的价格为

$$W(S_0,0) = e^{-rT}M(\sigma_c^2 T + \beta^2\sigma_c^4\sum_{i=1}^{N}\Delta t_i{}^2 - K_{var}{}^2) \tag{11}$$

其中，$M, r, \sigma_c, K_{var}, T$ 具体含义与前文相同，$\beta = 1/2 - r/\sigma_c^2$.

证明　由式(10)计算可得

$$W(S_0,0) = e^{-rT}M\left[\sum_{i=1}^{N}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}1/1(\sqrt{2\pi})^N \cdot \exp[-(\theta_1^2+\cdots+\theta_N^2)/2]\left(\sigma\sqrt{\Delta t_i}\theta_i - \beta\sigma^2\Delta t_i\right)^2 d\theta_1\cdots d\theta_N - \int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}1/(\sqrt{2\pi})^N \cdot \exp[-(\theta_1^2+\cdots+\theta_N^2)/2]K_{var}{}^2 d\theta_1\cdots d\theta_N\right] = e^{-rT}M(I_1 - I_2)$$

则

$$I_2 = K_{var}^2/(\sqrt{2\pi})^N\prod_{i=1}^{N}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp[-\theta_i^2/2]d\theta_i = K_{var}^2$$

$$I_1 = 1/(\sqrt{2\pi})^N\sum_{i=1}^{N}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\exp[-(\theta_1^2+\cdots+\theta_N^2)/2]\cdot(\sigma^2\Delta t_i\theta_i^2 - 2\beta\sigma^3\sqrt{\Delta t_i}\Delta t_i\theta_i + \beta^2\sigma^4\Delta t_i^2)d\theta_1\cdots d\theta_N = 1/(\sqrt{2\pi})^N\sum_{i=1}^{N}(Q_i^1 + Q_i^2 + Q_i^3)$$

$$Q_i^1 = \int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}(\theta_1^2+\cdots+\theta_N^2)}\sigma^2\Delta t_i\theta_i^2 d\theta_1\cdots d\theta_N = \sigma^2\Delta t_i(\sqrt{2\pi})^N$$

$$Q_i^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}(\theta_1^2+\cdots+\theta_N^2)}\cdot 2\sigma^3\beta\sqrt{\Delta t_i}\cdot\Delta t_i\theta_i d\theta_1\cdots d\theta_N = 0$$

$$Q_i^3 = \beta^2\sigma^4\Delta t_i^2(\sqrt{2\pi})^N$$

所以 $I_1 = \sigma^2 T + \beta^2\sigma^4\sum_{i=1}^{N}\Delta t_i^2$. 从而，$W(S_0,0) = e^{-rT}M(\sigma^2 T + \beta^2\sigma^4\sum_{i=1}^{N}\Delta t_i^2 - K_{var}^2)$.

2.2　方差互换定价的控制变量技巧算法设计

用常数波动率条件下的衍生产品价格的显性表达式(11)作为控制变量，求解基于复杂标的过程(1)和(2)情形下的方差互换产品的价值. 使用控制变量技巧为上述方差互换定价的具体算法如下：

① 先将时间段[0,T]做 n 等分，等分间隔 $\Delta t = T/n$，使观察点都落在间隔点上，基于过程(7)有 $S_{1,j}(t_{i+1}) = S_{1,j}(t_i)e^{(r-1/2\sigma_c^2)\Delta t + \sigma_c\sqrt{\Delta t}Z_{1,j,i}}$，$S_{1,j}(t_0) = S_0$，在每个间隔点产生一个标准正态分布的随机数 $Z_{1,j,i}$，这样就可以模拟股价 S_t 的一条路径 j；

② 根据标准方差互换的条款和 ① 中的模拟路径 j，计算控制变量初始时刻的价格为 $X_j = Me^{-rT}\left(\sum_{i=1}^{N}(\ln(S_{1,j}(t_i)/S_{1,j}(t_{i-1})))^2 - K_{var}{}^2\right)$；

③ 在第①步等分的基础上，且基于①中同一随机序列 $Z_{1,j,i}$，模拟过程(1)，有 $S_{2,j}(t_{i+1}) = S_{2,j}(t_i)e^{(r-1/2\sigma_j(t_i)^2)\Delta t + \sigma_j(t_i)\sqrt{\Delta t}Z_{1,j,i}}$，$S_{2,j}(t_0) = S_0$，其中随机波动率 $\sigma_j(t_i)$ 由另一模拟过程实现，即 $\sigma_j(t_i) = \sqrt{Y_j(t_i)}$，$Y_{j,i+1} = Y_{j,i}e^{(\mu-1/2\hat{\sigma}^2)\Delta t + \hat{\sigma}\sqrt{\Delta t}Z_{2,j,i}}$，$Z_{2,j,i}$ 是与 $Z_{1,j,i}$ 相关系数为 ρ 的标准正态分布的随机变量，它可以由 2 个独立的标准正态随机变量 $Z_{1,j,i}$ 与 $U_{j,i}$ 产生，即 $Z_{2,j,i} = \rho Z_{1,j,i} + \sqrt{1-\rho^2}U_{j,i}$，这样就可以模拟基于标的过程(1)和(2)股票价格 S_t 的一条轨迹；

④ 根据标准方差互换的条款和 ③ 中的模拟路径，可得方差互换初始时刻价格为 $V_j = Me^{-rT}\left(\sum_{i=1}^{N}(\ln(S_{2,j,i}/S_{2,j,i-1}))^2 - K_{var}{}^2\right)$；

⑤ 对于确定的常数 b，有 $V_j(b) = V_j - b(X_j - E[X])$，$E[X]$ 由式(11)给出；

⑥ 共进行 m 次模拟，取平均得随机波动率情况下该互换产品价格的控制变量估计为 $\bar{V}(b) = (1/m)\sum_{j=1}^{m}V_j(b) = \bar{V} - b(\bar{X} - E[X])$.

其中，用样本点估计 $\hat{b}_m = \sum_{j=1}^{m}(V_j - \bar{V})(X_j - \bar{X})\left(\sum_{j=1}^{m}(X_j - \bar{X})^2\right)^{-1}$ 来近似最优系数 b^*. 控制变量估计效果取决于所选控制与问题的相关性，在该算法中，估计效果主要取决于常数波动率 σ_c 的选取，如何选择有代表性的 σ_c，使得控制变量与问题有较高相关性，进而有较好的减小模拟误差的效果. 当取(1)、(2) 与(7) 的 1 阶矩与 2 阶矩相等时，得到最佳的常数波动率 σ_c，有下面的定理.

定理 2　当 $\sigma_c^2 = Y_0\dfrac{e^{\mu T} - 1}{\mu T}$时，过程(7)与过程(1)、(2)的 1 阶矩、2 阶矩近似相等.

证明　对于过程(7)，有 $E(S_T^{(1)}) = S_0e^{rT}$，$\mathrm{Var}(S_T^{(1)}) = S_0^2e^{2rT}(e^{\sigma_c^2 T} - 1)$.

对于过程(1)、(2)，有

$$E(S_T^{(2)}) = E\left(S_0 e^{\int_0^T \left(r-\frac{1}{2}Y(t)\right)dt+\int_0^T \sqrt{Y(t)}dW_{1t}}\right) = S_0 e^{rT}$$

$$\mathrm{Var}(S_T^{(2)}) = E[S_0^2 e^{2rT}(e^{-\int_0^T Y(t)dt+2\int_0^T \sqrt{Y(t)}dW_{1t}} - 1)] = S_0^2 e^{2rT} E(e^{2\int_0^T \sqrt{Y(t)}dW_{1t}-2\int_0^T Y(t)dt+\int_0^T Y(t)dt} - 1)$$

若随机积分 $\int_0^T Y(t)dt$ 近似成对均值积分 $\int_0^T E(Y(t))dt$，则由指数鞅定理得

$$\mathrm{Var}(S_T^{(2)}) = S_0^2 e^{2rT}(e^{\int_0^T E(Y(t))dt} - 1) = S_0^2 e^{2rT}(e^{Y_0\frac{e^{\mu T}-1}{\mu}} - 1)$$

若两过程初值相同，$E(S_T^{(1)}) = E(S_T^{(2)})$，$\sigma_c^2 T = Y_0 \dfrac{e^{\pi T}-1}{\mu}$时，$\mathrm{Var}(S_T^{(1)}) = \mathrm{Var}(S_T^{(2)})$.

把满足上面结论的 σ_c 所确定的控制变量视为最优控制，对应的控制变量估计作为产品的价格，此时的误差作为该算法的误差.下文将对该算法进行数值实现，考察其性质，并对定理 2 进行试验验证，即在 σ_c 的一个局部区域进行搜索，搜索出满足最优化问题 $\max\limits_{\sigma_c}\{\mathrm{Var}[V_j]\{\min\limits_{b}\{\mathrm{Var}[V_j(b)]\}\}^{-1}\}$ 的最优常数波动率 σ_c^*，并比较 σ_c^* 与定理 2 确定的波动率 σ_c.

2.3 试验结果及分析

参考条款上提供的数据，选择 $M = 1\ 000$，$r = 0.05$，$\mu = 0$，$\hat{\sigma} = 0.01$，$T = 1$，$Y_0 = 0.15^2$，由定理 2 确定的 σ_c 为 0.15，满足上述最优化问题的最优常数波动率 σ_c^* 的搜索区间定为[0.15 − 0.05，0.15 + 0.05]，时间方向做 100 步离散，由于敲定波动率 K_{var}是个常数减量，不影响对计算结果的分析，所以不妨取 $K_{\mathrm{var}} = 0$.下面分别记录了观察次数 $N = 1$ 和 $N = 5$ 时的计算结果.

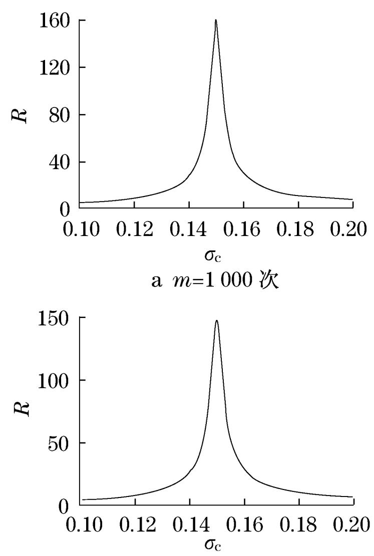
当观察次数 $N = 1$ 时，表 1 记录了不同模拟路径数 m 对应的数值结果.

表 1 $N = 1$ 时的模拟结果
Tab.1 The simulation results with $N = 1$

m/次	$(\sigma_c)_1$	$(\sigma_c^*)_2$	R	V	E_2
1 000	0.150 0	0.150 0	159.061 4	21.394 1	0.006 1
2 000	0.150 0	0.150 0	147.381 7	21.393 6	0.004 7
5 000	0.150 0	0.150 0	146.275 8	21.401 3	0.003 1
10 000	0.150 0	0.150 0	142.705 1	21.398 7	0.002 2
15 000	0.150 0	0.150 0	142.224 7	21.398 4	0.001 8

表 1 中，$(\sigma_c)_1$ 表示由定理 2 所确定的波动率常数；$(\sigma_c^*)_2$ 表示经过最优化搜索到的最优波动率常数；V 表示产品的价格；E_2 表示控制变量 Monte Carlo 模拟误差；若 E_1 表示传统 Monte Carlo 模拟误差，则 $R = E_1/E_2$，表示误差减小倍数.从表中结果可看到，每次搜索到的最优波动率常数都是 0.150 0，与由定理 2 确定的 σ_c 相等；控制变量技巧具有明显的减小模拟误差的效果，误差减小倍数都在 140 以上，不使用控制变量的模拟路径数需要增加 R^2 倍才能达到给定模拟路径数的控制变量估计的精度.随着模拟路径数的增加，控制变量估计误差逐渐变小，计算的产品价格比较稳定.

图 1 记录了部分最优常数波动率的搜索情况，即误差减小倍数与控制变量的波动率常数关系图，试验结果显示误差减小倍数 R 与控制变量常数波动率σ_c 非常敏感；每次模拟的误差减小倍数，在以最优的 $\sigma_c^* = 0.150\ 0$ 为中心呈对称分布.



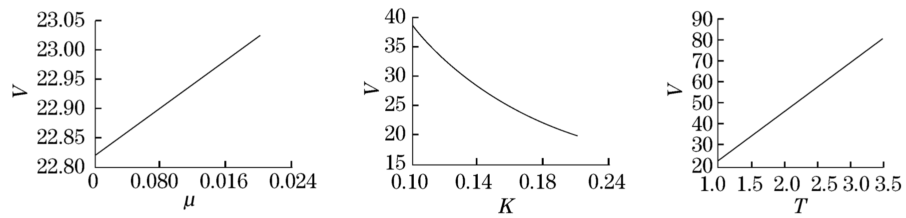
a m=1 000 次

b m=2 000 次

图 1 $N = 1$ 时的搜索情况
Fig.1 Searched results with $N = 1$

进一步考察了方差互换产品的价格与模型参数 μ，K，T 的量化关系，见图 2.方差互换的价格随 μ 的变大不断变大.这是因为如果波动率值有一个不断增加的趋势，标的资产的波动将会越来越厉害，高风险对应高收益，相应的产品价值将攀升.产品价值与敲定方差呈反比关系，同时与合约期限的长短也有一定的关系.期限越长，意味着不确定的因素越多，从而隐含的风险就高.而对一份金融产品而言，高风险必然要求高回报，故而期限长的互换在其他一致的前提下其价值高于期限短者.

为便于比较，记录了观察次数 $N = 5$ 时的部分数值计算结果，见表 2 和图 3.



a 参数μ　　b 参数K　　c 参数T

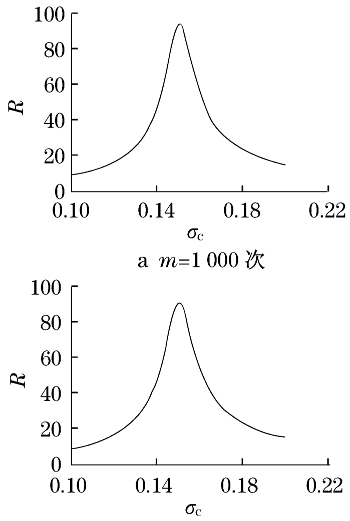
图 2　模拟次数 2000 次控制变量的波动率 0.15 时方差互换产品价格与参数 μ, K, T 的关系

Fig.2　Price of the variance swap against parameters μ, K, T

表 2　$N=5$ 时的模拟结果

Tab.2　Simulation results with $N=5$

m/次	$(\sigma_c)_1$	$(\sigma_c^*)_2$	R	V	E_2
1 000	0.150 0	0.151 0	93.760 7	21.689 5	0.004 6
2 000	0.150 0	0.150 0	91.417 8	21.688 0	0.003 5
5 000	0.150 0	0.150 0	90.582 4	21.691 1	0.002 2
10 000	0.150 0	0.150 0	87.904 3	21.687 9	0.001 6
15 000	0.150 0	0.150 0	88.268 4	21.687 3	0.001 3



a m=1 000 次

b m=2 000 次

图 3　$N=5$ 时的搜索情况

Fig.3　Searched results with $N=5$

结果表明，$N=5$ 时的变化规律与 $N=1$ 时的变化规律比较一致，最优波动率常数在 0.150 0 附近取得，只在 $m=1\ 000$ 次时，搜索的最优波动率为 0.151 0，与定理 2 确定的 0.150 0 略有波动，但可看到此时的减小倍数 93.760 7 与 0.150 0 时对应的减小倍数93.704 7差别很小.控制变量估计误差随着模拟次数增加也有减小趋势，每次模拟计算得到的产品价格较稳定，略高于 $N=1$ 时的价格.由图 3 可看出，误差减小倍数仍以最优值为中心成对称分布.

3　结语

本文用控制变量技巧对方差互换衍生产品进行定价，通过选取高效的控制变量大大减小了模拟误差，提高了计算效率.该算法不仅可以类似地推广到其他方差互换衍生产品，如 Corridor 方差互换等产品价值的计算，也可以为其他随机波动率模型下的衍生产品的定价及多因子模型价格的计算等提供有效思路.

参考文献：

［1］ Derman E，Kamal M，Zhou J，et al. A guide to volatility and variance swaps[J]. The Journal of Derivatives，1999，6(4)：9.

［2］ Detemple J，Osakwe C. The valuation of volatility options[J]. European Finance Review，2000，4：21.

［3］ Brockhaus O，Long D. Volatility swaps made simple[J]. Risk，1999，2：92.

［4］ Hull J，White A. The pricing of options on assets with stochastic volatilities[J]. Journal of Finance，1987，42(2)：281.

［5］ Scott L O. Option pricing when the variance changes randomly：theory，estimation，and an application[J]. Journal of Financial and Quantitative Analysis，1987，22(4)：419.

［6］ Stein E M，Stein J C. Stock price distributions with stochastic volatility：an analytic approach[J]. Review of Financial Studies，1991，4(4)：727.

［7］ Glasserman P. Monte Carlo methods in financial engineering[M]. Berlin：Springer，2004.

［8］ Nelson B L. Control variate remedies[J]. Operations Research，1990，38：974.