

基于最优 R-Vine Gaussian Copula 模型的服役大跨桥梁主梁失效概率分析

刘逸平¹, 肖青凯^{1,2}, 杨光红², 刘月飞^{2,3}, 樊学平^{2,3}

(1. 华南理工大学 土木与交通学院 广东 广州 510641; 2. 兰州大学 土木工程与力学学院, 甘肃 兰州 730000; 3. 兰州大学 西部灾害与环境力学教育部重点实验室, 甘肃 兰州 730000)

摘要: 考虑到服役大跨桥梁主梁多个控制监测点失效模式的相关性, 提出失效概率分析的最优 regular-vine (R-vine) Gaussian copula 信息融合新方法。利用极值应变信息, 引入双变量 pair-Gaussian-copula 模型和最优 R-vine 模型, 结合多个控制监测点的功能函数, 进行失效模式相关性的最优 R-vine Gaussian copula 建模分析; 融合一次二阶矩方法, 进行失效模式相关的服役大跨桥梁主梁失效概率分析; 通过在役桥梁监测数据对所提方法的合理性进行验证, 并与其他分析方法进行比较。结果表明, 考虑控制监测点失效模式相关性的大跨桥梁主梁失效概率分析的最优 R-Vine Gaussian copula 信息融合方法更为合理。

关键词: 结构工程; 主梁; 相关性; R-vine Gaussian copula 模型; 一次二阶矩方法; 可靠性分析

中图分类号: TU391; TU392.5

文献标志码: A

Failure Probability Analysis of Service Long-Span Bridge Girder Based on Optimal R-Vine Gaussian Copula Model

LIU Yiping¹, XIAO Qingkai^{1,2}, YANG Guanghong²,
LIU Yuefei^{2,3}, FAN Xueping^{2,3}

(1. School of Civil Engineering and Transportation, South China University of Technology, Guangzhou, 510641, China; 2. School of Civil Engineering and Mechanics, Lanzhou University, Lanzhou 730000, China; 3. Key Laboratory of Mechanics on Disaster and Environment in Western China of the Ministry of Education, Lanzhou University, Lanzhou 730000, China)

Abstract: Considering the correlation among the failure modes of the multiple control monitoring points from the

existing long-span bridge girder, a novel optimal R-vine Gaussian copula data fusion method for failure probability analysis is presented. Based on the extreme strain information, an optimal R-vine Gaussian copula model considering the correlation among the failure modes of the multiple control monitoring points is built by combining the corresponding performance functions, the bivariate pair-Gaussian-copula model and the optimal R-vine model. Further, with the first order second moment method, the failure probability analysis of the existing long-span bridge girder is conducted considering the correlation among the failure modes. The feasibility and application of the method proposed is compared with the other analysis methods based on the monitoring data of the existing bridge. The results show that the optimal R-Vine Gaussian copula information fusion method for the failure probability analysis of long-span bridge girder considering the correlation among failure modes is more reasonable.

Key words: structural engineering; girder; correlation; R-vine Gaussian copula model; first order second moment method; reliability analysis

由于输入随机源(车辆荷载、温度荷载、风荷载等)相同, 桥梁健康监测(BHM)系统在各个控制监测点采集的数据具有一定的相关性, 进而监测点失效模式之间也存在相关性。如何合理利用这些监测数据并考虑监测点失效相关性来分析大跨桥梁主梁

收稿日期: 2020-08-28

基金项目: 广州市科技计划(201903010046); 甘肃省自然科学基金(20JR10RA625, 20JR10RA623); 中央高校基本科研业务费专项资金(lzujbky-2020-55); 国家重点研发计划(2019YFC1511005); 国家自然科学基金(51608243)

第一作者: 刘逸平(1974—), 男, 教授, 博士生导师, 工学博士, 主要研究方向为实验力学、损伤力学。

E-mail: tcypliu@scut.edu.cn

通信作者: 樊学平(1983—), 男, 副教授, 工学博士, 主要研究方向为桥梁安全评定与预后。

E-mail: fxp_2004@163.com



论文
拓展
介绍

可靠度,便成为BHM领域亟需解决的关键科学问题,可以在役桥梁的安全评价和养护维护决策提供理论依据和应用方法。

桥梁可靠性研究主要是利用抗力信息(容许应变等)和荷载效应信息(极值应变等),采用合适的可靠性计算方法,进行构件或体系的可靠性分析。现定义桥梁监测点的可靠度为构件可靠度,而考虑多个监测点相关或独立的桥梁主梁可靠度为体系可靠度^[1]。

基于BHM数据并考虑监测点失效相关性的大跨桥梁可靠性研究已取得一些成果:文献[2-4]基于BHM数据,初步假定2个监测点失效模式非线性相关,采用贝叶斯动态二维 Gaussian copula 模型研究了长春伊通河桥主梁可靠性的动态预测方法;Liu等^[5]基于BHM数据,假定多个监测点失效模式非线性相关,采用贝叶斯动态多维 Gaussian copula 模型研究了天津富民桥主梁可靠性的动态预测方法;刘月飞等^[1]基于BHM数据,采用C/D-vine Gaussian copula 模型对天津富民桥主梁截面的可靠性进行了评估分析;樊学平等^[6]基于BHM数据,采用贝叶斯动态C/D vine Gaussian copula 模型对天津富民桥主梁截面的可靠性进行了预测分析;Liu等^[7]采用多变量 copula 模型进行了桥梁结构的系统可靠性评估分析。上述研究中的 pair-copula 均为 pair-Gaussian-copula 函数,进一步验证了 Gaussian copula 函数在桥梁可靠性分析中的合理性和适用性。

由上述研究可知,基于监测数据并考虑监测点相关性的桥梁可靠性研究主要通过引入 copula 函数进行,但随着维度的增加,模型参数估计变得更为困难,缺乏灵活性和通用性,因而在高维相依性建模方法存在局限性。Vine Gaussian copula 理论的出现解决了这个问题^[8-9],最优 regular-vine Gaussian copula 作为一种以双变量 pair-Gaussian-copula 为基础模型的特殊的 vine Gaussian copula 模型,可以将高维 Gaussian copula 函数分解为多个 pair-Gaussian-copula 函数的结合,提高了模型的拟合度。C/D-vine Gaussian copula 模型是特殊的 R-vine Gaussian copula 模型,由于遍历性弱,其也只适合于随机变量个数较少的情况。因而建立适合于高维随机变量的最优 R-vine Gaussian copula 建模方法还需要展开深入研究。

本文以服役大跨桥梁主梁为研究对象,基于主梁多个控制监测点(对应多个监测变量)的日常极值应变监测数据,首先,引入双变量 pair-Gaussian-copula 模型,实现多个监测点相依结构的变量分离,进而,结

合最优 R-vine 理论,建立刻画监测变量间相关性的最优 R-vine Gaussian copula 模型及其对应的 R-vine 矩阵;然后,基于控制监测点的功能函数,对各监测点失效模式相关性进行建模分析,结合一次二阶矩方法,对失效模式相关的大跨桥梁主梁进行失效分析;最后通过在役桥梁监测数据进行验证分析。

1 监测变量的最优 R-vine Gaussian copula 模型及其对应的 R-vine 矩阵

大跨桥梁主梁包含多个应变监测点,考虑到动态监测日常极值应变的随机性,每个监测点的应变被认为是一个监测变量,因而多个监测点对应多个监测变量。由于具有共同输入随机源(共同的环境荷载与车辆荷载),这些监测变量相互之间存在非线性相关性^[1-7]。引入 pair-Gaussian-copula 理论和二维 Gaussian copula 理论建立刻画这些相关性的最优 R-vine Gaussian copula 模型及其对应的 R-vine 矩阵。

1.1 Pair-Gaussian-copula 理论

Bedford等^[8-9]提出了基于 pair copula 构造模块的多元随机变量联合概率分布模型。Pair copula 构造模块为多维随机变量提供了一种分离变量间相依结构的方法,可以将多维随机变量按照某种逻辑结构分解为多个两两变量的 pair copula 模块,为 copula 理论在高维随机变量的应用提供了理论基础。

将桥梁主梁 n 个监测点所对应的监测极值应变定义为一个 n 维随机变量 $X = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$, 基于 copula 模型的联合概率密度函数为 $f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$, 按照条件密度函数理论可以写为

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) = & \\ c(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_i(x_i), \dots, & \\ F_n(x_n)) \prod_{i=1}^n f_i(x_i) & \end{aligned} \quad (1)$$

式中: c 为 copula 密度函数; $F_i(x_i)$ 和 $f_i(x_i)$ 分别为随机变量 x_i 的边缘概率分布函数和概率密度函数。

由式(1)可得二维随机变量的联合概率密度函数为

$$\begin{aligned} f(x_a, x_j) = c_{aj}(F_a(x_a), F_j(x_j)) f_a(x_a) f_j(x_j) \\ a, j = 1, 2, \dots, n \text{ 且 } a \neq j \end{aligned} \quad (2)$$

式中: $c_{aj}(F_a(x_a), F_j(x_j))$ 为 x_a 和 x_j 的二维 copula 密

度函数。

由式(2)可得,在 x_j 已知的条件下, x_a 的概率密度函数为

$$f(x_a|x_j) = c_{aj}(F_a(x_a), F_j(x_j))f_a(x_a) \quad (3)$$

$a, j = 1, 2, \dots, n$ 且 $a \neq j$

由式(3)可得,在 n 维随机变量 \mathbf{u} 已知的条件下,任意随机变量 x 的条件密度函数为

$$f(x|\mathbf{u}) = c_{xu|\mathbf{u}_{-a}}(F(x|\mathbf{u}_{-a}), F(\mathbf{u}_a|\mathbf{u}_{-a}))f(x|\mathbf{u}_{-a}) \quad (4)$$

式中: u_a 为 n 维随机变量 \mathbf{u} 中的一个分量; \mathbf{u}_{-a} 为 n 维随机变量 \mathbf{u} 中去掉 u_a 之后的 $n-1$ 维分量; $c_{x, v_a|\mathbf{v}_{-a}} =$

$\frac{\partial C_{x, v_a|\mathbf{v}_{-a}}(F(x|\mathbf{v}_{-a}), F(v_a|\mathbf{v}_{-a}); \theta_{x, v_a|\mathbf{v}_{-a}})}{\partial F(x|\mathbf{v}_{-a})\partial F(v_a|\mathbf{v}_{-a})}$ 是 $C_{x, v_a|\mathbf{v}_{-a}}$ 对

应的 pair-copula 密度函数,结合式(4),随机变量 x

$$C(u_1, u_2; \rho) = \Phi_G(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2); \rho) =$$

$$\int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)^{1/2}} \exp\left(\frac{-(r^2 - 2\rho rs + s^2)}{2(1-\rho^2)}\right) dr ds \quad (7)$$

$$c(u_1, u_2; \rho) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(\frac{\Phi^{-1}(u_1)^2 + \Phi^{-1}(u_2)^2 - 2\rho\Phi^{-1}(u_1)\Phi^{-1}(u_2)}{2(1-\rho^2)}\right) \exp\left(-\frac{\Phi^{-1}(u_1)^2\Phi^{-1}(u_2)^2}{2}\right) \quad (8)$$

式中: $u_i = F_i(x_i), i = 1, 2, F_i(x_i)$ 是 x_i 的边缘概率分布函数; Φ_G 为 Gaussian copula 函数; Φ 为标准正态分布函数; Φ^{-1} 为 Φ 的逆函数; $r = \Phi^{-1}(u_1); s = \Phi^{-1}(u_2); \rho$ 为 copula 函数的相关参数, $\rho \in [-1, 1]$ 。

1.2 最优 R-vine Gaussian copula 模型及对应的 R-vine 矩阵

多元随机变量不同的排列顺序对应着不同的多元分布结构, Bedford 等^[8-9]引入 vine 来对多元随机变量的分解结构进行描述,其中,性能最好的是最优 R-vine 结构。

1.2.1 R-vine Gaussian copula 模型

R-vine Gaussian copula 模型就是利用 pair-Gaussian-copula 模型作为基础模块对多元随机变量以一系列树集的形式进行分层分解。对非空有限点集 V ,令维数 $d = |V|$,则在 V 上定义的 R-vine 是一系列树集 $\nu = (T_1, \dots, T_{n-1})$,其中 $T_1 = (V_1, E_1), T_{n-1} = (V_{n-1}, E_{n-1}), V_1 = V, V_i = E_{i-1} (i \geq 2)$,即:树 T_i 的点是 T_{i-1} 的边,用 $\{v, w\}$ 表示 T_i 的一条边,即 $E_i \subseteq \{\{v, w\} | v \neq w \in V_i\}$, ν 中的每棵树 T_i 满足邻近

的条件分布函数可以表示为

$$F(x|\mathbf{v}) = \frac{\partial C_{x, v_a|\mathbf{v}_{-a}}(F(x|\mathbf{v}_{-a}), F(v_a|\mathbf{v}_{-a}); \theta_{x, v_a|\mathbf{v}_{-a}})}{\partial F(v_a|\mathbf{v}_{-a})} \quad (5)$$

其中,当 \mathbf{v} 为单个变量时, $F(x|\mathbf{v})$ 可以简化为

$$F(x|\mathbf{v}) = \frac{\partial C(F_x(x), F_v(v); \theta)}{\partial F_v(v)} = \frac{\partial C(u_1, u_2; \theta)}{\partial u_2} = h(u_1, u_2; \theta) \quad (6)$$

式(5)、(6)中: $u_1 = F_x(x)$ 和 $u_2 = F_v(v)$ 分别为 x 变量和 v 变量对应的边缘累积分布函数。

式(7)和式(8)分别表示二元 Gaussian copula 概率分布函数和二元 Gaussian copula 概率密度函数。

条件。

对于 n 维随机变量 $X = (X_1, \dots, X_n)$,第 i 个随机变量的边缘高斯密度函数为 f_i ,对应的 R-vine Gaussian copula 联合密度函数为

$$f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^n f_k(x_k) \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{e \in E} c_{v, w|D(e)}(F(x_v|x_{D(e)}), F(x_w|x_{D(e)})) \quad (9)$$

式中: $E = \{E_1, E_2, \dots, E_{n-1}\}$ 为边集; $e = \{v, w | D(e)\}$ 为 E_i 中的一条边; $c_{v, w|D(e)}$ 为对应的 pair-Gaussian-copula 密度函数,其中 v, w 为边 e 相连接的两个节点, $D(e)$ 为条件集; $F(x_v|x_{D(e)})$ 和 $F(x_w|x_{D(e)})$ 为条件高斯概率分布函数,利用式(4)~(6)可递推得到。

1.2.2 R-vine 结构的构建方法

在随机变量个数较少的情况下,可以通过遍历所有的 R-vine 结构,结合观测数据选取最优 R-vine 结构,但是一旦变量个数较多时, R-vine 结构数量会急剧增加。Nápoles 等^[10]指出,在考虑不同变量所对应的节点顺序情况下, d 维随机变量的 R-vine 结构

有 $\frac{d!}{2} 2^{C_{d-2}^2}$ 种。因此本文通过最大生成树(MST-PRIM)算法^[11]来选择最优 R-vine 结构,构建过程如下。

(1)计算两两变量之间的 Kendall 秩相关系数,通过最大化 Kendall 线性相关系数绝对值之和 D 来选择 R-vine 结构的第 1 棵树,即

$$D = \max \sum_{\{v,w\} \in E_i} |\delta_{v,w}| \quad (10)$$

式中: $\delta_{v,w}$ 为变量 v (节点)和变量 w (节点)对应 Kendall 秩相关系数; E_i 为第 i 棵树的边集。

(2) 基于节点之间变量对的分布,确定每条边对应的 pair-Gaussian-copula 模型,且对其函数的参数进行估计。

文中基于 Kendall 秩相关系数对 Gaussian copula 模型相关参数进行估计, Kendall 秩相关系数是 Gaussian copula 函数常用的相关性测度,常见的二元 Gaussian copula 相关参数与 Kendall 秩相关系数 τ_k 之间的关系见文献^[11-12]。

(3) 上一层树每条边对应的变量对,作为下一层树的节点,重新根据 MST-PRIM 算法确定下一层对应的树结构和 pair-Gaussian-copula 模型。

(4) 重复步骤(3),直到节点数目为 2,即完成 R-vine 结构的构建。

以 5 维监测随机变量为例,构建其对应 R-vine 结构如图 1 所示。由图 1 可知,5 维监测随机变量 R-vine 结构有 4 棵树、5 个节点,节点之间的连线叫做边,共有 10 条边,每条边对应一个 pair-copula 模型,其中“|”线之后的变量代表的是条件变量。

为方便表示联合密度函数的分解形式,Nápoles 等^[10]提出利用约束矩阵 $M = (m_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$ 来储存 R-

$$f_{1,\dots,n}(x_1, \dots, x_n) =$$

$$\prod_{k=n-1}^1 \prod_{i=n}^{k+1} c_{m_{k,i}, m_{k,i} | m_{i+1,k}, \dots, m_{n,k}} \left(F_{m_{k,i} | m_{i+1,k}, \dots, m_{n,k}}, F_{m_{i,k} | m_{i+1,k}, \dots, m_{n,k}} \right) \quad (12)$$

式中: $m_{k,i}$ 为矩阵 M 中 k 行 i 列对应的节点, $F_{m_{k,i} | m_{i+1,k}, \dots, m_{n,k}}$ 和 $F_{m_{i,k} | m_{i+1,k}, \dots, m_{n,k}}$ 为 $m_{k,i}$ 和 $m_{i,k}$ 对应的条件高斯概率分布函数,由式(4)~(6)可递推得到。

Nápoles 等^[10]和 Dissmann 等^[11]采用下三角矩阵 $M = (m_{i,j})_{n \times n}$ 来表示最优 R-vine 矩阵,本文将采用此方法来刻画最优 R-vine 结构。以上述 5 维监测随机变量的最优 R-vine 结构为例,最优 R-vine 矩阵 M 为

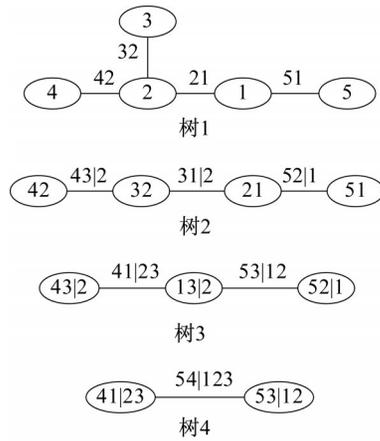


图 1 五维随机变量对应的 R-vine 分解结构

Fig. 1 R-vine structure of fine-dimensional random variables

vine 的所有树和边的集合 ν ,这样每一个条件分布可以根据约束集集合 $C_M = C_M(i) \cup \dots \cup C_M(d-1)$ 来表达,其中第 $i(i=1, \dots, n-1)$ 个约束矩阵集表示为

$$C_M(i) = \left\{ \left\{ \{m_{i,i}, m_{k,i}\}, D \right\} \middle| \begin{array}{l} k = i+1, \dots, n \\ D = \{m_{k+1,i}, \dots, m_{n,i}\} \end{array} \right\} \quad (11)$$

式中: $m_{k,i}$ 为矩阵 M 中 k 行 i 列对应的节点; $\{m_{i,i}, m_{k,i}\}$ 称为被条件集; D 为条件集。

1.2.3 最优 R-vine Gaussian copula 模型和对应最优 R-vine 矩阵的构建方法

根据 Bedford 等^[9]的推导,运用约束集矩阵的符号表示,可得随机向量 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的最优 R-vine Gaussian copula 联合密度函数为一组 pair-Gaussian-copula 和边缘密度函数之积,如式(12)所示。

$$M = \begin{pmatrix} 5 & & & & \\ 4 & 4 & & & \\ 3 & 1 & 3 & & \\ 2 & 3 & 1 & 2 & \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (13)$$

式(13)的具体构造步骤是:将第 1 棵树的节点排列在主对角线上,主对角线上第 1 个节点和矩阵最后 1 行的节点构成第 1 棵树的边,如(5, 1)、(4, 2)、(3, 2)、(2, 1)是第 1 棵树的边;主对角线上第 1 个节点和倒数第 2 行的节点以矩阵最后 1 行节点为条件构

成第2棵树的边,如(5, 2|1)、(4, 3|2)、(3, 1|2)是第2棵树的边;主对角线上第1个节点和矩阵倒数第3行的节点以矩阵最后2行为条件构成第3棵树的边,如(5, 3|1, 2)、(4, 1|2, 3)是第3棵树的边;以此类推即可得到R-vine结构。

2 失效模式非线性相关的在役桥梁主梁失效概率分析

基于监测变量非线性相关性R-vine Gaussian copula模型,多个监测点失效模式非线性相关性模型可利用两两监测点失效模式间的二元失效模式pair-Gaussian-copula模块,通过最优R-vine结构来建立。利用所建立的最优R-vine Gaussian copula模型可实现失效模式相关的桥梁主梁失效概率分析,核心流程详细步骤为:①基于混凝土的容许应变和监测极值应变信息(拉应变为正,压应变为负),采用一次二阶矩方法,计算监测点可靠指标和失效概率;②基于监测点失效概率,采用pair-Gaussian-copula理论,进行任意2个监测点及其失效模式非线性相关的主梁失效概率分析;③基于任意2个监测点失效模式非线性相关的主梁失效概率分析结果,基于所建立的最优R-vine Gaussian copula模型,采用串联结构体系可靠性分析方法,进行多个监测点失效模式非线性相关的大跨桥梁主梁失效概率分析。

2.1 桥梁主梁监测点可靠指标计算

采用一次二阶矩方法^[13-14]进行桥梁主梁监测点可靠指标的计算,桥梁监测点极限状态方程为

$$g(R, S) = R - S \quad (14)$$

式中: R 为容许应变; S 为极值应变。 R 与 S 相互独立。

监测点可靠指标计算公式为

$$\beta = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \quad (15)$$

式中: μ_S 、 σ_S 分别为截面监测点极值应变的平均值与标准差; μ_R 、 σ_R 分别为容许应变的平均值和标准差。

极值应变指每天监测应变绝对值的极大值,监测的拉应变为正,压应变为负。

2.2 考虑两个失效模式相关性的主梁失效概率分析

Pair-copula模块中的二元结构体系有2种形式:串联体系和并联体系。任意2个监测点形成的

二元组合结构体系是并联体系^[1-2,5],即本文R-vine结构中任意一条边的两个点之间呈并联关系。根据文献[2]可知, n 维并联结构体系的失效模式功能函数为

$$h_i(X_i) = R - X_i, i = 1, \dots, n \quad (16)$$

式中: n 为监测点总数; i 为第 i 个监测点; X_i 为第 i 个监测点的极值应变。

基于式(7)、(8)和式(14)~(16),可得pair-Gaussian-copula模块中任意二元结构体系失效模式同时发生的概率为

$$\begin{aligned} P(h_i(X_i) \leq 0, h_j(X_j) \leq 0) &= \\ P(H_i(h_i(X_i)) \leq H_i(0), H_j(h_j(X_j)) \leq H_j(0)) &= \\ P(U_i \leq H_i(0), U_{j+1} \leq H_j(0)) &= \\ C(H_i(0), H_j(0); \rho_{ij}) &= \\ C(p_i, p_j; \rho_{ij}) & \end{aligned} \quad (17)$$

式中: $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ 且 $i \neq j$; X_i 为第 i 个监测点的

极值应变; $H_i(h_i(X_i)) = \Phi\left(\frac{R - x_i - \mu_i}{\sigma_i}\right)$; $H_i(0) = \Phi\left(\frac{-\mu_i}{\sigma_i}\right)$; $H_j(0) = \Phi\left(\frac{-\mu_j}{\sigma_j}\right)$; p_i 和 p_j 为监测点的失效概率,可以由式 $p_i = \Phi(-\beta)$ 得到, β 为可靠指标。

2.3 多个监测点失效模式非线性相关的桥梁主梁失效概率分析

假定桥梁主梁任意2个监测点非线性相关的二元结构体系呈串联关系,结合式(17)可得多个失效模式非线性相关的桥梁主梁失效概率为

$$p_{i_{\text{system}}} = \max_{i \neq j} (C(p_i, p_j; \rho_{ij}), i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (18)$$

多个失效模式相互独立的桥梁主梁失效概率为

$$p_{i_{\text{system}}} = \max(p_i, i = 1, 2, \dots, n) \quad (19)$$

式中: p_i 是第 i 个监测点的失效概率。

3 算例分析

肇庆西江大桥为大跨度连续刚构组合梁桥,主桥上部结构为预应力混凝土桥-连续箱梁组合体系^[15-16]。采用第5跨顺桥向5个截面(A, B, C, D, E)的健康监测数据对第5跨主梁进行失效概率分析。截面位置及传感器布置如图2、3所示,其中截面A对应传感器1和传感器2,截面B对应传感器3

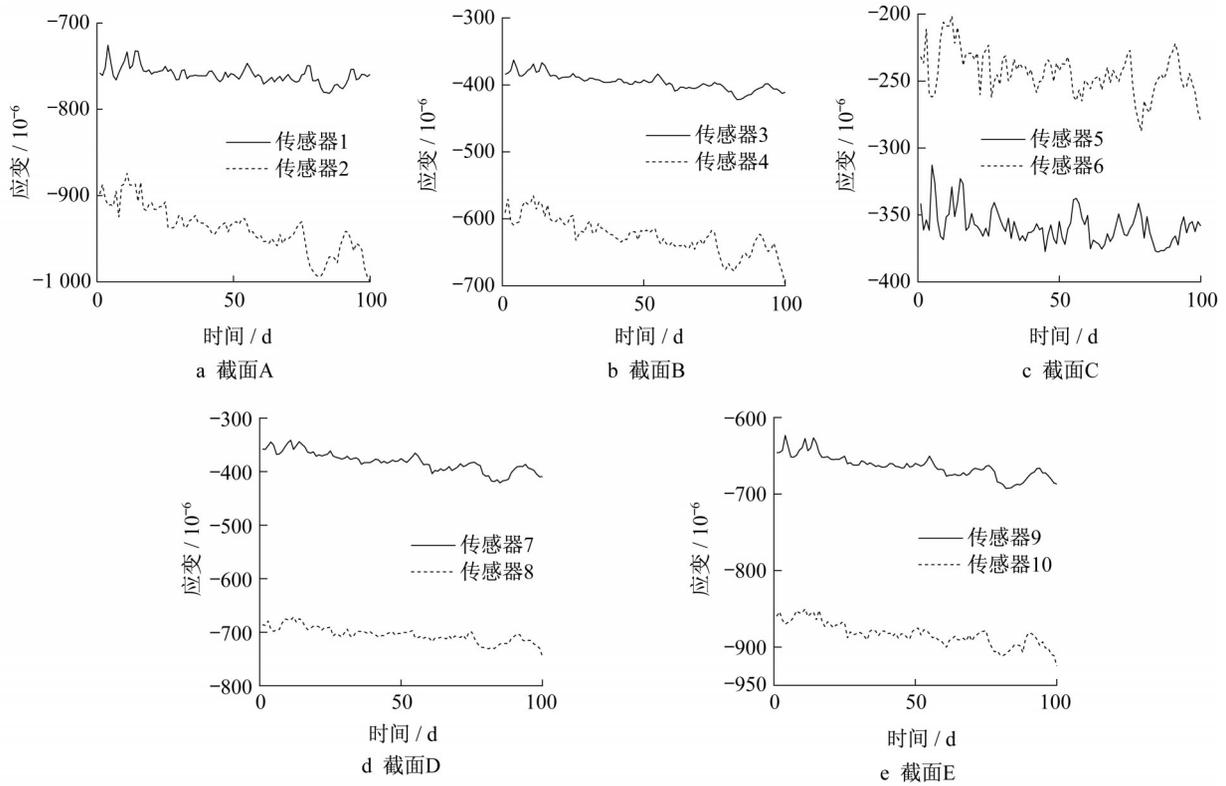


图4 5个截面监测极值应变时程曲线

Fig. 4 Monitored extreme strain curves of five sections

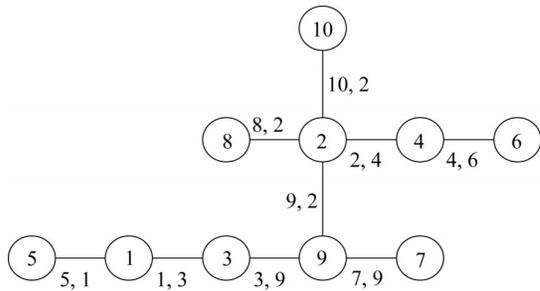


图5 R-vine的第1棵树形结构图

Fig. 5 First tree of R-vine structure

靠指标进行计算。

基于表1,结合式(12)和式(13)可得监测点可靠

指标为

$$\beta = \frac{1597.68 - \mu}{\sqrt{175.74^2 + \sigma^2}} \quad (21)$$

式中: μ 和 σ 分别为监测点极值应变绝对值的平均值与标准差。

肇庆西江大桥第5跨主梁顺桥向截面A、B、C、D、E所对应10个监测点的可靠指标和失效概率如表2所示。从表2中计算结果可知,同一截面的不同测点(顶部和底部)对应的可靠指标和失效概率会出现差异性较大的结果,这主要是由于预应力混凝土结构在预应力和荷载共同作用下,同一截面顶、底板位置的应力状态不同。

表1 各监测点变量对应的均值、标准差和p值

Tab. 1 Mean, standard deviation and p-value of multiple monitored variables

监测点	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
均值/ 10^{-6}	-759.957	-938.060	-395.742	-625.292	-358.568	-243.790	-381.768	-704.543	-663.628	-883.117
标准差/ 10^{-6}	9.629 3	27.958 5	11.864 3	26.581 6	12.464 1	16.564 6	18.447 0	14.220 5	14.593 8	15.266 2
p值	0.563 0	0.696 3	0.866 2	0.772 3	0.540 5	0.969 7	0.989 0	0.686 9	0.505 8	0.553 2

结合表2,利用式(19)可得不考虑失效模式相关性的第5跨主梁失效概率为

$$p_{fa} = \max(p_{f_1}, p_{f_2}, \dots, p_{f_{10}}) = 1.0500 \times 10^{-4} \quad (22)$$

基于确定的最优R-vine矩阵(式(20)所示)和pair-copula失效模块,通过二元Gaussian copula对考虑失效模式非线性相关的第5跨主梁失效概率进行

表2 各监测点对应的可靠指标和失效概率

Tab. 2 Reliability index and failure probability of multiple monitoring point

测点 位置	A截面		B截面		C截面		D截面		E截面	
	可靠指标	失效概率	可靠指标	失效概率	可靠指标	失效概率	可靠指标	失效概率	可靠指标	失效概率
顶部	4.759 6	9.7008×10^{-7}	6.823 6	$4.440 0 \times 10^{-12}$	7.033 0	$1.010 9 \times 10^{-12}$	6.880 8	$2.975 4 \times 10^{-12}$	5.296 6	$5.899 2 \times 10^{-8}$
底部	3.706 7	$1.050 0 \times 10^{-4}$	5.470 7	$2.240 9 \times 10^{-8}$	7.669 7	$8.617 5 \times 10^{-15}$	5.065 5	$2.037 2 \times 10^{-7}$	4.050 7	$2.553 7 \times 10^{-5}$

分析。基于构建的R-vine copula模型,桥梁截面的10个监测点可以分解为45个两两结构相依的失效模块。各失效模块对应的失效概率如表3所示。

由表3可得,第5跨主梁所对应的10维随机变量各组合模块失效模式的失效概率,根据式(18)可得,考虑失效模式非线性相关的第5跨主梁失效概率为

$$p_{in} = \max(p_{f_{v,w}}, \{v, w\} \in E_i) = 2.269 5 \times 10^{-5} \quad (23)$$

式中: $p_{f_{v,w}}$ 表示v节点和w节点的pair-copula模块的失效概率; $E_i(i=1, \dots, 9)$ 为表3中第i棵树的边集。

由式(22)和式(23)计算结果可知,采用最优R-vine Gaussian copula模型,肇庆西江大桥第5跨主梁考虑失效模式相关性的失效概率要小于不考虑

失效模式相关性时的失效概率。式(22)和式(23)计算结果的差异性与文献[1]建立的C/D-vine Gaussian copula模型计算结果的差异性相比(文献[1]中不考虑失效模式相关性的失效概率为 1.06×10^{-2} ,采用C/D-vine Gaussian copula模型考虑失效模式相关性的失效概率为 1.6×10^{-3} 和 1.7×10^{-3} ,考虑与不考虑失效模式相关性计算结果的差异性偏小,说明C/D-vine Gaussian copula考虑的相关性偏小),进一步验证了本文最优R-vine Gaussian copula模型的准确性。而且,文中采用的最优R-vine Gaussian copula模型是根据变量间相依性特征来决定其相依结构的形式,与文献[1]事先设定树结构形式而建立的C/D-vine Gaussian copula模型相比,在变量间相关性建模上拟合效果更佳,且更符合变量间的实际情况。

表3 各失效模块对应的失效概率

Tab. 3 Failure probability of multiple pair-Gaussian-copula

树	连接边	Kendall 秩相关系数	失效概率
1	1,5	0.473 7	$5.577 9 \times 10^{-13}$
	2,8	0.853 2	$2.037 1 \times 10^{-7}$
	4,6	0.574 0	$7.303 5 \times 10^{-15}$
	3,1	0.611 8	$4.211 4 \times 10^{-12}$
	2,10	0.822 4	$2.269 5 \times 10^{-5}$
	2,4	0.874 5	$2.240 7 \times 10^{-8}$
	9,2	0.761 4	5.8983×10^{-8}
	9,3	0.914 6	$4.135 8 \times 10^{-12}$
	9,7	0.920 1	$3.028 9 \times 10^{-12}$
2	3,5 1	0.025 1	$2.977 4 \times 10^{-23}$
	4,8 2	0.183 0	$3.447 6 \times 10^{-12}$
	2,6 4	-0.170 5	$9.613 6 \times 10^{-24}$
	9,1 3	-0.151 1	$1.500 0 \times 10^{-17}$
	9,10 2	-0.166 5	$4.655 0 \times 10^{-16}$
	9,4 2	-0.166 9	$3.038 6 \times 10^{-20}$
	3,2 9	-0.292 1	$8.839 7 \times 10^{-26}$
7,3 9	0.272 7	$2.715 3 \times 10^{-17}$	

续表

树	连接边	Kendall 秩相关系数	失效概率
3	9,5 3,1	-0.075 6	$3.073 6 \times 10^{-22}$
	6,8 4,2	0.336 6	$8.211 7 \times 10^{-16}$
	9,6 2,4	-0.337 8	$4.603 5 \times 10^{-41}$
	2,1 9,3	-0.340 2	$2.738 2 \times 10^{-19}$
	4,10 9,2	0.070 3	$6.300 8 \times 10^{-12}$
	3,4 9,2	-0.057 4	$2.052 5 \times 10^{-21}$
	7,2 3,9	0.239 2	$3.346 5 \times 10^{-13}$
4	2,5 9,3,1	-0.205 3	$1.525 6 \times 10^{-22}$
	9,8 6,4,2	0.111 5	$8.855 0 \times 10^{-13}$
	3,6 9,2,4	-0.125 3	$7.530 8 \times 10^{-32}$
	4,1 2,9,3	-0.119 2	$3.820 0 \times 10^{-17}$
	3,10 4,9,2	0.073 5	$2.393 1 \times 10^{-15}$
	7,4 3,9,2	0.085 7	$7.275 3 \times 10^{-18}$
5	4,5 2,9,3,1	-0.090 1	$2.978 1 \times 10^{-23}$
	3,8 9,6,4,2	0.124 8	$3.490 8 \times 10^{-16}$
	1,6 3,9,2,4	0.217 4	$9.783 3 \times 10^{-17}$
	10,1 4,2,9,3	-0.104 6	$4.079 5 \times 10^{-13}$
	7,10 3,4,9,2	-0.073 9	$1.450 5 \times 10^{-18}$
6	6,5 4,2,9,3,1	-0.210 1	$2.442 2 \times 10^{-38}$
	1,8 3,9,6,4,2	-0.012 5	$1.173 2 \times 10^{-13}$
	10,6 1,3,9,2,4	0.097 8	$1.652 2 \times 10^{-17}$
	7,1 10,4,2,9,3	0.012 1	$5.526 9 \times 10^{-18}$
7	8,5 6,4,2,9,3,1	-0.059 8	$4.179 3 \times 10^{-21}$
	10,8 1,3,9,6,4,2	0.085 3	$7.411 2 \times 10^{-11}$
	7,6 10,1,3,9,2,4	0.021 0	$1.474 8 \times 10^{-25}$
8	10,5 8,6,4,2,9,3,1	-0.014 1	$1.285 5 \times 10^{-17}$
	7,8 10,1,3,9,6,4,2	-0.111 9	$2.465 9 \times 10^{-22}$
9	7,5 10,8,6,4,2,9,3,1	0.185 9	$2.540 0 \times 10^{-19}$

4 结论

(1) 给出了大跨桥梁主梁多个控制监测点监测数据之间最强相关性的最优 R-vine 分析方法,解决了高维随机变量遍历性复杂的特点。

(2) 提出了大跨桥梁主梁失效概率分析的最优 R-vine Gaussian copula 数据融合方法。

(3) 为考虑高维随机变量相关性和多个监测点失效模式相关性的大跨桥梁主梁失效概率分析提供了一种新思路,为在役桥梁安全评价提供了理论基础和应用方法。

作者贡献说明:

刘逸平:指导结构健康监测。

肖青凯:数据分析,撰写论文初稿。

杨光红:协助完善研究内容。

刘月飞:修改完善数学理论。

樊学平:指导论文总体框架,定稿。

参考文献:

- [1] 刘月飞,樊学平.失效非线性相关的桥梁截面可靠性 Vine-Copula 数据融合[J].同济大学学报(自然科学版),2019,47

- (3): 315.
LIU Yuefei, FAN Xueping. Data fusion about vine-copula for bridge section reliability considering nonlinear correlation of failure modes [J]. Journal of Tongji University (Natural Science), 2019, 47(3): 315.
- [2] FAN X P, LIU Y F. Time-variant reliability prediction of bridge system based on BDGCM and SHM data[J]. Structural Control and Health Monitoring, 2018, 25:1.
- [3] LIU Y F, FAN X P. Gaussian copula-Bayesian dynamic linear model - based time-dependent reliability prediction of bridge structures considering nonlinear correlation between failure modes [J]. Advances in Mechanical Engineering, 2016, 8(11): 1.
- [4] 刘月飞. 考虑失效模式和验证模式相关性的桥梁结构体系可靠度分析[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2015.
LIU Yuefei. System reliability analysis of bridge structures considering correlation of failure modes and proof modes [D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2015.
- [5] LIU Y F, FAN X P. Dynamic reliability prediction for the steel box girder based on multivariate Bayesian dynamic Gaussian copula model and SHM extreme stress data [J]. Structural Control and Health Monitoring, 2020, 27(6): 1.
- [6] 樊学平, 杨光红, 肖青凯, 等. 考虑安全性的桥梁主梁体系可靠性动态藤 Copula 预测方法[J]. 同济大学学报(自然科学版), 2020, 48(2): 165.
FAN Xueping, YANG Guanghong, XIAO Qingkai, *et al.* Dynamic vine-copula prediction approach of bridge girder system reliability considering structural safety [J]. Journal of Tongji University (Natural Science), 2020, 48(2): 165.
- [7] LIU H B, WANG X R, TAN G J, *et al.* System reliability evaluation of a bridge structure based on multivariate copulas and the AHP-EW method that considers multiple failure criteria [J]. Applied Sciences, 2020, 10(4): 1399.
- [8] BEDFORD T, COOKE R M. Probability density decomposition for conditionally dependent random variables modeled by vines [J]. Annals of Mathematics & Artificial Intelligence, 2001, 32(1/4): 245.
- [9] BEDFORD T, COOKE R M. Vines: a new graphical model for dependent random variables [J]. Annals of Statistics, 2002, 30(4): 1031.
- [10] NAPOLES O M, COOKE R M, KUROWICKA D. About the number of vines and regular vines on n nodes [R/OL]. [2010-12-01]. https://www.researchgate.net/publication/297914162About_the_number_of_vines_and_regular_vines_on_n_nodes.
- [11] DISSMANN J, BRECHMANN E C, CZADO C, *et al.* Selecting and estimating regular vine copulae and application to financial returns[J]. Computational Statistics & Data Analysis, 2013, 59: 52.
- [12] YULE G U, KENDALL M. An introduction to the theory of statistics [M]. 14 ed. Belmont: Charles Griffin & Co, 1965.
- [13] MELCHERS R E, BECK A T. Structural reliability analysis and prediction[M]. New York: John Wiley & Sons, 2018.
- [14] ANG A H S, TANG W H. Probability concepts in engineering planning and design (vol. II) [M]. New York: John Wiley and Sons Ltd, 1984.
- [15] 李英华. 基于长期健康监测的连续刚构梁桥的性能分析与演化规律研究[D]. 广州: 华南理工大学, 2012.
LI Yinghua. Performance analysis and evolution of continuous rigid frame bridge based on long-term health monitoring [D]. Guangzhou: South China University of Technology, 2012.
- [16] 王震. 基于桥梁长期健康监测的数据特征分析与可靠度计算[D]. 广州: 华南理工大学, 2014.
WANG Zhen. Characteristics analysis and reliability calculation based on long-term bridge health monitoring data [D]. Guangzhou: South China University of Technology, 2014.